

## KLAUSUR ZUR MECHANIK II SS 10

14.10.2010

### Aufgabe 1: Lagrange-Gleichungen 1. und 2. Art (19 Punkte)

1. Theoretische Frage (5 = 2 + 3 Punkte).

- (a) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen 2. Art für ein System mit  $n$  generalisierten Koordinaten?
- (b) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art? Erklären Sie, in welchem Kontext ihre Anwendung nützlich ist.

2. Rechenaufgabe (14 = 1 + 3 + 3 + 2 + 3 Punkte).

Gegeben sei das System in Abb. 1. Die zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind mit einem nicht dehnbaren Seil der Länge  $l$  miteinander verbunden und befinden sich auf zwei schiefen Ebenen, deren Neigung durch die konstanten Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  bestimmt ist. Vernachlässigen Sie die Reibung.

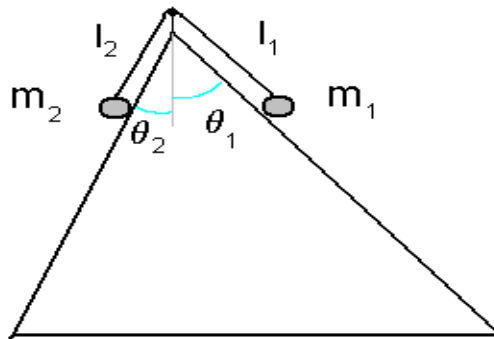


Abbildung 1: Zwei Massen auf zwei schiefen Ebenen.

- (a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingung für die Variablen  $l_1$  und  $l_2$ .
- (b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion  $L$  des Systems als Funktion der generalisierten Koordinate  $l_1$ .
- (c) Bestimmen und lösen Sie die Lagrange Gleichungen 2. Art für die Anfangsbedingungen  $l_1(0) = a$  und  $\dot{l}_1(0) = 0$ .
- (d) Geben Sie nun die Lagrange-Funktion des Systems als Funktion der Variablen  $l_1$  und  $l_2$  an.
- (e) Bestimmen und lösen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für die Anfangsbedingungen aus Aufgabenteil (b).

### Aufgabe 2: Lagrange vs Hamilton (24 Punkte)

1. Theoretische Frage (7 = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 Punkte).

- (a) Wie ist die Poisson-Klammer  $\{F, G\}_{(\vec{q}, \vec{p})}$  für zwei Funktionen  $F = F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N, t)$  und  $G = G(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N, t)$  definiert?

- (b) Sei  $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N, t)$  die Hamilton-Funktion eines Systems. Drücken Sie die totale Ableitung nach der Zeit  $t$  einer Funktion  $F = F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N, t)$  mit Hilfe der Poisson-Klammern aus.
- (c) Schreiben Sie die Hamilton-Gleichungen mit Hilfe der Poisson-Klammern. (Tipp: benutzen Sie Aufgabenteil (b)).
- (d) Welche Bedingung muss eine Funktion  $F = F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_N, t)$  erfüllen, um ein Integral der Bewegung zu sein?
- (e) Seien  $F$  und  $G$  zwei Integrale der Bewegung. Ist  $\{F, G\}$  auch ein Integral der Bewegung?
2. Rechenaufgabe (16 = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 1 Punkte).  
Gegeben sei die folgende Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}m(t)\dot{q}^2, \quad m(t) = m_0 e^{\beta t}, \quad (1)$$

wobei  $m_0$  eine positive reelle Zahl und  $\beta$  eine reelle Zahl ist.

- (a) Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichung.
- (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen  $q(0) = 0$  und  $\dot{q}(0) = v_0 > 0$ .
- (c) Welches Vorzeichen muss  $\beta$  haben, damit die Bewegungsgleichung ein Teilchen mit Masse  $m_0$  beschreibt, auf das eine Reibungskraft agiert? Wie lautet diese Reibungskraft?
- (d) Bestimmen Sie die Energie  $E$  des Systems. Ist sie erhalten?
- (e) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion  $H = H(q, p)$  des Systems.
- (f) Ist der kanonische Impuls  $p$  eine erhaltene Größe?
- (g) Bestimmen und lösen Sie die Hamilton Gleichungen.
- (h) Ist die Hamilton-Funktion ein Integral der Bewegung?

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (17 Punkte)

1. Theoretische Frage (9 = 1 + 4 + 4).
- (a) Geben Sie allgemein die Lorentz-Transformation des Ortsvektors  $x^\mu$  an.
- (b) Geben Sie die Formel für die Zeitdilatation an und erklären Sie diese.
- (c) Geben Sie die Formel für die Längenkontraktion an und erklären Sie diese.
2. Rechenaufgabe (8 = 1 + 3 + 4 Punkte)  
Gegeben sei ein Raumschiff mit Masse  $m_0$ .
- (a) Wie lautet die Energie  $E_{RR}$  des Raumschiffs im Ruhesystem des Raumschiffs?
- (b) Von der Erde aus gesehen bewegt sich das Raumschiff mit Geschwindigkeitsbetrag  $v$  von der Erde weg. Wie groß muss  $v$  sein, damit die Energie des Raumschiffs im System der Erde

$$E_{RE} = 2m_0 c^2$$

lautet?

- (c) Von der Erde aus gesehen fliegt das Raumschiff eine Strecke  $L = 100c \cdot 1 \text{ s}$  mit Geschwindigkeit  $v$  aus Aufgabenteil (b). Dann kehrt es instantan um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zur Erde zurück. Wie lange hat die Reise im System der Erde gedauert (Dauer:  $t_E$ ) und wie lange im System des Raumschiffs ( $t_R$ )?