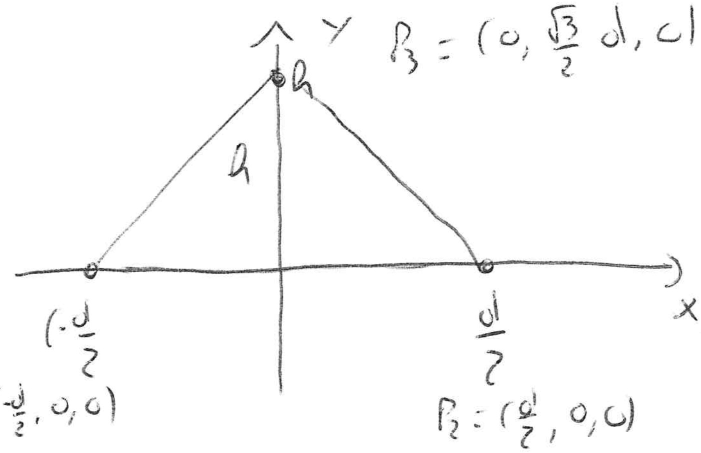
a)



$$h^2 + \frac{d^2}{4} = d^2 \mapsto h = \frac{\sqrt{3}}{2} d.$$

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(x+\tfrac{d}{2})\delta(y)\delta(z) + q\,\delta(x-\tfrac{d}{2})\delta(y)\delta(z) + q\,\delta(x)\delta(y-\tfrac{\sqrt{3}}{2}d)\delta($$

b) $Q = \sum_i q_i = 3q.$

Das Potential in der Monopolnäherung lautet einfach

$$\varphi_{MON}(\vec{r}) = k\frac{Q}{r} = k\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

c) Das elektrische Feld in der Monopolnäherung lautet

$$\vec{E}_{MON} = -\nabla\varphi = kQ\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

c) $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r_i} = q \cdot \left(-\frac{d}{2}, 0, 0\right) + q\left(\frac{d}{2}, 0, 0\right) + q\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} d, 0\right)$

$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} d, 0\right)$

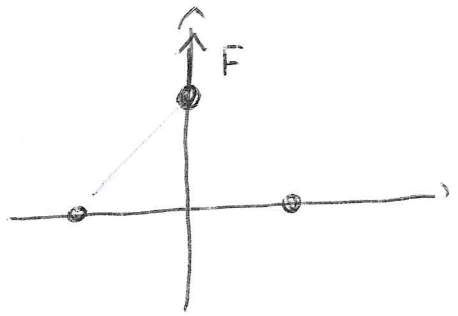
Das Potential in der Dipolnäherung lautet also

$$\varphi(\vec{r}) = \underbrace{K \frac{Q}{r}}_{\varphi_{\text{MON}} \text{ (WICHTIG!!!!)}} + K \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} =$$

$$= K \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + K \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d\, y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Zur Zeit $t=t_0$ wird das Teilchen in $(0, \frac{\sqrt{3}}{2} d, 0)$ frei.

Die Kraft der anderen zwei Teilchen agiert entlang der y-Achse.



Das Teilchen bewegt sich also entlang der positiven y-Achse.

Die Energie des System zur Zeit $t=t_0$ lautet

$$E_{t=t_0} = 3k\frac{q^2}{d} = k\frac{q^2}{d} + k\frac{q^2}{d} + k\frac{q^2}{d}.$$

Die Energie am Ende lautet

$$E_{t>>t_0} = \frac{kq^2}{d} + \frac{1}{2}mv^2$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{2kq^2}{d}$$

$$\boxed{v = 2|q|\sqrt{\frac{k}{md}}}.$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ lautet also

$$\vec{v} = \left(0, 2|q|\sqrt{\frac{k}{md}}, 0\right).$$

2.2.a

$$J_z = J_0\,\delta(x^2 - a^2)\,\delta(y)$$

$$= \frac{J_0}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\delta(y)$$

explizite Rechnung durch die Gl.

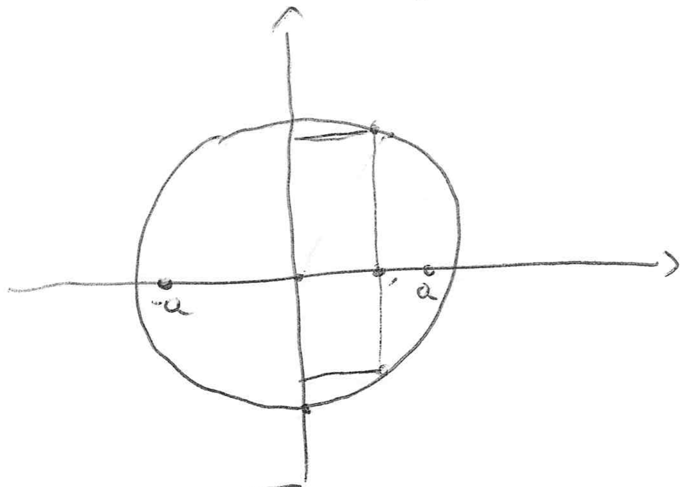
$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x-x_i) \qquad \text{wobei } f(x_i) = 0 \text{ und } f'(x_i) \neq 0$$

Daraus folgt

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$$

✓

$$I = \int_C d\vec{F} \cdot \vec{J} = \int_C dx\,dy\,J_z(x,y)$$



Formell:

$$\int_C dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{x^2+R^2}}^{\sqrt{x^2+R^2}} dy$$

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{x^2+R^2}}^{\sqrt{x^2+R^2}} dy\,\frac{J_0}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\delta(y) =$$

$$= \int_{-R}^{R} dx\,\frac{J_0}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] = \begin{cases} \frac{J_0}{a} & \text{für } a < R \\ 0 & \text{für } a > R \end{cases}$$

Ergo:

$$\boxed{I(R) = \frac{J_0}{a}\,\vartheta(R-a)}$$

Ohne die formelle Rechnung durchzuführen, ist es auch korrekt zu sagen:

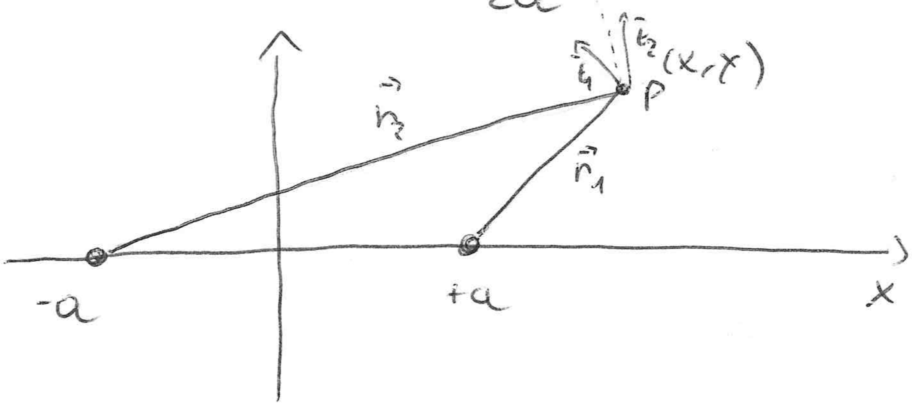
für $|a| < R$ liegen die 2 singuläre Punkte innerhalb des Kreises

→ Integration über δ ist trivial.

für $a > R$ → ausserhalb → $I = 0$.

3.2.b

Die physikalische Situation entspricht 2 Drähte: ein Draht mit Koordinaten $x = a$, $y = 0$ und Strom $\frac{J_0}{2a}$ und ein Draht mit Koordinaten $x = -a$, $y = 0$ mit Strom $\frac{J_0}{2a}$



Das Magnetfeld in $P = (x, y)$ ist dann die Summe zwei Magnetfelder, die aus den 2 Drähten stammen:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0\left(\frac{J_0}{2a}\right)}{2\pi r_1}\,\vec{t}_1 \rightsquigarrow |\vec{t}_1| = 1,\ \vec{t}_1 \perp \vec{r}_1 \text{ und } \vec{e}_z \\[2ex] \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0\left(\frac{J_0}{2a}\right)}{2\pi r_2}\,\vec{t}_2 \rightsquigarrow |\vec{t}_2| = 1,\ \vec{t}_2 \perp \vec{r}_2 \text{ und } \vec{e}_z. \end{cases}$$

Alternative Schreibweise :

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 \left(\frac{J_0}{2a}\right)}{2\pi r_1^2} \dfrac{\left(\vec{e}_z \times \vec{r}_1\right)}{\|\vec{e}_z \times \vec{r}_1\|} \\[2ex] \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 \left(\frac{J_0}{2a}\right)}{2\pi r_2^2} \dfrac{\left(\vec{e}_z \times \vec{r}_2\right)}{\|\vec{e}_z \times \vec{r}_2\|} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \left(0,\ 0,\ B_0\, e^{-a|z| - b(x^2+y^2)}\right)$$

Energiedichte

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\, e^{-2a|z|} \cdot e^{-2b(x^2+y^2)}$$

Energie:

$$E_{feld} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r\; W =$$

zylindrische Koordinaten

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-2a|z|} \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-2br^2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi B_0^2}{\mu_0} \cdot 2 \int_0^{\infty} dz\, e^{-2az} \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-2br^2}$$

Marker lat:

$$\int_0^\infty dz\, e^{-2az} = \frac{1}{-2a}\left(e^{-2az}\right)_0^\infty = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty dr\, r e^{-2br^2} = \left(\begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r dr \end{array} \right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{2} e^{-2bt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2b} = \frac{1}{4b}$$

Putting all together:

$$E_{field} = \frac{2\pi B_0^2}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2a} \frac{1}{4b} = \frac{\pi B_0^2}{4\mu_0 b}.$$