THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 4 **19.11.2010**

Aufgabe 1 Energie-Impuls-Tensor (8 Punkte = 3 + 5)

1. Zeige, dass $T^{\mu}_{\ \mu} = 0$, wobei $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor ist.
2. Zeige, dass der Ausdruck $w^2 - \frac{1}{c^2}|\vec{S}|^2$ im Vakuum eine Lorentz-Invariante des elektromagnetischen Feldes ist. Dabei ist $w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2)$ die Energiedichte und $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ der Poynting-Vektor des Feldes. Man führe dazu den Ausdruck auf bekannte Lorentz-Invarianten zurück.

Aufgabe 2: Energiedichte und Energiestromdichte (10 Punkte = 3 + 4 + 3)

Die ebene Welle im Vakuum sei durch $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ gegeben.

1. Wie groß ist die Feldenergiedichte der elektromagnetischen Welle?
2. Wie lautet die longitudinale und die transversale Energiestromdichte?
3. Wie groß ist das Zeitmittel $\bar{w}$ und $\bar{\vec{S}}$ über eine Periodendauer? Das Zeitmittel von $f(t)$ über die Zeitdauer T lautet $\bar{f}(t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dt' f(t')$.

Aufgabe 3: δ-Funktion (12 Punkte = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[(x^2+1)\delta(x^2+6x+5)\right] . \tag{1}$$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x^2) . \tag{2}$$
3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{d\delta(x)}{dx}(x+\cosh x) . \tag{3}$$
4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x)^2 . \tag{4}$$
5. $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\delta(x^2+1)e^{\arctan(x^2+\cosh x)}\right] \tag{5}$$
6. $$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^5 \mathrm{d}y \left[(x^2+y^2)\delta(x-2y)\right] . \tag{6}$$

7.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^5 \mathrm{d}y \left[e^{-(x^2+y^2)} \delta(x^2+y^2-100) \right] \ . \tag{7}$$

8.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \delta(x^2+y^2+z^2-5) \ . \tag{8}$$