THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 5 **26.11.2010**

Aufgabe 1: Zum Satz von Gauß (12 Punkte = 2 + 2 + 3 + 3 + 2)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ , \tag{1}$$

wobei $k = const.$

1. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ für $\vec{r} \neq 0$.
2. Finden Sie eine Funktion $\varphi = \varphi(r)$ (wobei $r = |\vec{r}|$), damit
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi \ . \tag{2}$$
3. Berechnen Sie das geschlossene Flächenintegral
$$\phi = \oint_{S(V)} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \ , \tag{3}$$
wobei $S(V)$ die Oberfläche einer Kugel mit Radius R mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung ist.
4. Gegeben sei das Volumenintegral
$$I = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \ , \tag{4}$$
wobei V das Volumen der Kugel aus Aufgabenteil 3. ist. Wie muss man das Ergebnis für $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ aus Aufgabenteil 1. auf alle $\vec{r}$ erweitern, damit der Satz von Gauß für die Integrale ϕ und I gilt?
5. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})$.

Aufgabe 2: Zum Satz von Stokes (9 Punkte = 2 + 3 + 2 + 2)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \ , \tag{5}$$

wobei $k = const.$

1. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r})$.
2. Berechnen Sie das Linienintegral
$$L = \oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \ , \tag{6}$$
wobei C ein Kreis in der xy-Ebene mit Mittelpunkt im Koordinatenzentrum darstellt.
3. Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})$ für $\vec{r} \neq 0$.

4. Gegeben sei das Flächenintegral

$$\varphi = \int_S \mathrm{d}\vec{f} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \ , \tag{7}$$

wobei S die Fläche ist, die von dem Kreis C aus Aufgabenteil 2. eingeschlossen wird. Wie muss man das Ergebniss für $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r})$ aus Aufgabenteil 3. auf alle $\vec{r}$ erweitern, damit der Satz von Stokes für die Integrale L und φ gilt?

<u>*Aufgabe 3: Energie einer Kugel*</u> (9 Punkte = 3 + 3 + 3)

Gegeben sei das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \theta(r - R), \tag{8}$$

wobei $\theta(x)$ die Heaviside-Funktion ist und $R = const > 0$.

1. Berechnen Sie das Potential $\varphi(r)$, welches $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi$ erfüllt.
2. Berechnen Sie die Energiedichte $w(\vec{r})$ und die gesamte Energie $U = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}\,[w(\vec{r})]$.
3. Wie lautet U für $R \to 0$? Wieviel Energie ist notwendig, um ein punktförmiges Teilchen zu erzeugen?