THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

Aufgabenblatt 6 **3.12.2010**

Aufgabe 1: Zylinder (11 Punkte = 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2)

Gegeben sei ein Zylinder Z der Länge L und Radius R. Die Achse des Zylinders stimme mit der z-Achse überein und der Mittelpunkt des Zylinders sei im Koordinatenursprung.

1. Beschreiben Sie die Fläche des Zylinders S durch die Funktion $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, wobei $u = \varphi$ und $v = z$.
2. Berechnen Sie das infinitesimale Flächenelement $d\vec{f}$ für jeden Punkt von S.
3. Gegeben sei das elektrische Feld
$$\vec{E}(\vec{r}) = k\, g(x^2 + y^2)\, (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\ , \tag{1}$$
wobei $g(x^2 + y^2)$ eine beliebige Funktion und $k = const.$ ist. Berechnen Sie den Fluss
$$\varphi_S(\vec{E})\ . \tag{2}$$
4. Bestimmen Sie die gesamte Ladung Q, die sich im Volumen V befindet, das von der Fläche S und den zwei Kreisen C_1 (parallel zu der xy-Ebene und mit Zentrum in $(0, 0, L/2)$) und C_2 (parallel zu der xy-Ebene und mit Zentrum in $(0, 0, -L/2)$) eingeschlossen wird.
5. Gegeben sei das elektrische Feld
$$\vec{E}(\vec{r}) = (A\,\theta(x), 0, B\,\theta(z))\ , \tag{3}$$
wobei A, B Konstanten und $\theta(x)$, $\theta(z)$ Stufenfunktionen sind. Berechnen Sie den Fluss
$$\varphi_S(\vec{E})\ . \tag{4}$$
6. Bestimmen Sie die gesamte Ladung Q, die sich im Volumen V von Aufgabenteil 4. befindet.

Aufgabe 2: Geladene Kugel (12 Punkte = 2 + 2 + 3 + 3 + 2)

Gegeben sei die Ladungsdichte
$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\, \theta(R - r)\ ,$$
wobei $\rho_0 = const. > 0$.

1. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. (Tipp: zeigen Sie zunächst, dass das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ aus Symmetriegründen zentral sein muss. Wenden Sie dann den Satz von Gauß an.)
2. Bestimmen Sie die Energiedichte w und die gesamte Energie $E_{Feld} = \int d^3\vec{r}\, w(\vec{r})$.
3. Berechnen und zeichnen Sie das Potential $\varphi(r)$.
4. Gegeben sei ein Testteilchen der Masse m und Ladung $q > 0$, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(0, 0, R)$ befindet. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung und drücken Sie die Lösung in der Form $t = t(x)$ aus. (Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$.)

5. Gegeben sei ein Testteilchen der Masse m und Ladung $-q < 0$, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(0, 0, R)$ befindet. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung und drücken Sie die Lösung in der Form $x = x(t)$ aus. (Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$. Vernachlässigen Sie dabei die Reibung des Testteilchens mit der geladenen Kugel.)

Aufgabe 3: Zirkulation des Feldes $\vec{B}$ (7 Punkte = 1 + 2 + 2 + 1 + 1)

Gegeben seien die Ströme $\vec{J_1} = A\,\theta(r_1^2 - x^2 - y^2)(0, 0, 1)$ und $\vec{J_2} = B\,\theta(r_2^2 - x^2 - z^2)(0, 1, 0)$, wobei $A = const.$ und $B = const.$

1. Zeichnen Sie den Verlauf der Ströme.
2. Berechnen Sie die Zirkulation des Feldes $\vec{B}$ entlang eines Kreises C_1 mit Radius R_1, der parallel zur xy-Ebene ist und dessen Mittelpunkt sich in $(0, 0, L > 0)$ befindet.
3. Berechnen Sie die Zirkulation des Feldes $\vec{B}$ entlang eines Kreises C_2 mit Radius R_2, der parallel zur xz-Ebene ist und dessen Mittelpunkt sich in $(0, L > 0, 0)$ befindet.
4. Berechnen Sie die Zirkulation des Feldes $\vec{B}$ entlang eines Kreises C_3 mit Radius R_3, der parallel zur yz-Ebene ist und dessen Mittelpunkt sich in $(L > 0, 0, 0)$ befindet.
5. Sei $R_1 = R_2 = L$, wobei $L > r_1$ und $L > r_2$, und sei $K = C_1 \cup C_2$. Berechnen Sie die Zirkulation des Feldes $\vec{B}$ entlang K.