KLAUSUR ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 2010/11

17.03.2011

<u>*Aufgabe 1: Elektrostatik*</u> (17 Punkte)

1. Theoretischer Teil (7 = 1 + 2 + 2 + 2 Punkte).

   (a) Gegeben sei eine statische Ladungsdichte $\rho = \rho(\vec{r})$ in Abwesenheit magnetischer Induktionsfelder. Wie lauten die nicht-trivialen Maxwell-Gleichungen (in differentieller Form) für diesen Fall?

   (b) Gegeben seien die Ladung q_1 in $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ und die Ladung q_2 in $\vec{r}_2 = (1, 1, 1)$ m. Wie lautet die dazugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$?

   (c) Bestimmen Sie den Fluss des elektrischen Feldes $\vec{E}$ durch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, das beide Ladungen von Aufgabenteil (b) einschließt.

   (d) Gegeben sei eine Fläche S. Berechnen Sie die Zirkulation $C_{K(S)}(\vec{E})$ entlang der Kurve $K(S)$, die die Fläche S begrenzt.

2. Rechenaufgabe (10 = 3 + 5 + 2 Punkte).

   Gegeben sei eine zweidimensionale kreisförmige Scheibe mit Radius R, die in der xy-Ebene liegt und deren Zentrum mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt. Die Scheibe sei homogen geladen und sei Q die Gesamtladung.

   (a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ der Scheibe an.

   (b) Bestimmen Sie das Potential $\varphi(0, 0, z)$ entlang der z-Achse.

   (c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(0, 0, z)$ entlang der z-Achse.

<u>*Aufgabe 2: Magnetostatik*</u> (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil (9 = 1 + 2 + 2 + 3 Punkte).

   (a) Gegeben sei eine statische Stromdichte $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ in Abwesenheit elektrischer Felder. Wie lauten die nicht-trivialen Maxwell-Gleichungen (in differentieller Form) für diesen Fall?

   (b) Gegeben sei ein Volumen V. Berechnen Sie den Fluss des magnetischen Induktionsfeldes $\vec{B}$ durch die Oberfläche $S(V)$ des Volumens V.

   (c) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

   $$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{s} \ , \tag{1}$$

   wobei $\vec{A}$ das Vektor-Potential und S die Fläche ist, die von der Kurve $C(S)$ begrenzt wird.

   (d) Gegeben sei eine Testladung q, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Welche Kraft wirkt auf die Testladung? Geben Sie die entsprechende Gleichung an. Ist diese Kraft konservativ?

2. Rechenaufgabe (12 = 4 + 4 + 4).

   Gegeben sei das magnetische Induktionsfeld

   $$\vec{B} = b\,(-y, x, 0)\, e^{-\lambda(x^2+y^2)} \ , \tag{2}$$

   wobei b und λ Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie das Integral $\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s}$, wobei K ein Kreis mit Radius R ist, der in der xy-Ebene liegt und seinen Mittelpunkt im Koordinatenurprung hat.

(b) Bestimmen sie das Vektor-Potential $\vec{A}$, aus dem $\vec{B}$ folgt. (Hinweis: setzen Sie $A^1 = A^2 = 0$).

(c) Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$.

Aufgabe 3: Kovariante Formulierung der Elektrodynamik (22 Punkte)

1. Theoretischer Teil (10 = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 Punkte).

(a) Sei J^μ der Vierer-Strom. Geben Sie die Lagrangedichte der Elektrodynamik für das Vierer-Potential A^μ an.

(b) Zeigen Sie, wie der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ unter der Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \eta$ transformiert ($\eta(X)$ ist eine beliebige skalare Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten).

(c) Wie lautet die Definition von $\tilde{F}^{\mu\nu}$? Zeigen Sie, wie dieses Objekt unter der Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \eta$ transformiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Wirkung der Elektrodynamik unter der Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \eta$ invariant ist.

(e) Wenn das Photon eine Masse hätte, sollte man den folgenden Term zur Lagrangedichte dazuaddieren:

$$\mathcal{L}_{mass} = m^2 A_\mu A^\mu \ . \tag{3}$$

Prüfen Sie, ob dieser Term eichinvariant ist.

2. Rechenaufgabe (12 = 2 + 4 + 3 + 3 Punkte).

Sei $J^\mu = 0$. Gegeben sei das Vierer-Potential

$$A^\mu = b\varepsilon^\mu e^{-\lambda(\omega t - kz)^2} \ , \tag{4}$$

wobei b, λ, ω and k Konstanten sind und $\varepsilon^\mu \equiv (0, 1, 0, 0)$.

(a) Berechnen Sie $\partial_\mu A^\mu$. Welche Eichung wird realisiert?

(b) Wie muss ω lauten, damit die Bewegungsgleichungen für das Feld A^μ erfüllt sind?

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld.

(d) Berechnen Sie das magnetische Induktionsfeld.