THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 1 **27.10.2011**

Aufgabe 1: Stirling, Hochzeit, absurdes Spiel (9 Punkte = 2 + 3 + 4)

1. Stirling. Beweisen Sie, dass $n!$ für sehr großes n wie folgt approximiert werden kann:
$$n! \approx (n/e)^n \ .$$
Hinweis: $\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \simeq \int_1^n \mathrm{d}x \ln x$.
2. Hochzeit. Auf einer Hochzeit gibt es 40 Leute (38 Gäste + das Ehepaar). Sie entscheiden, alle mögliche Bilder zu schießen: ein Bild mit den Eheleuten, ein Bild mit Eheleuten+Trauzeugen, ein Bild mit allen Teilnehmern, etc. Wie viele unterschiedliche Bilder können gemacht werden? (Die Position der Personen im Bild sei gleichgültig. Es gibt z.B. nur ein Bild mit männlichen Teilnehmern.)
3. Das Spiel geht wie folgt. Am Anfang befindet man sich bei $x = 0$. Dann wirft man eine Münze. Wenn Zahl gewinnt, ist das Spiel gleich vorbei: die total zurückgelegte Strecke ist null. Wenn Kopf gewinnt, geht man 1 m nach rechts (bis $x = 1$ m). Dann wird erneut die Münze geworfen: wenn Zahl gewinnt, ist das Spiel vorbei und die totale zurückgelegte Strecke ist nun 1 m. Wenn Kopf gewinnt, geht man noch 1 m weiter nach rechts (bis $x = 2$ m). Dann wird nochmal die Münze geworfen, und so weiter. Man wiederholt das Spiel mehrmals.

   Berechnen Sie die mittlere zurückgelegte Strecke $\langle x \rangle$.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator (8 Punkte = 1 + 3 + 4)

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion
$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

1. Wie sieht sein Phasenorbit aus?
2. Berechnen Sie den Zeitmittelwert von q^2 im Limes $\tau \to \infty$.
3. Berechnen Sie den Ensemblemittelwert von q^2 für die Phasenraumdichte
$$\rho(\pi) = C\delta(H - E),$$
und geben Sie die Normierung C an.

Aufgabe 3: Trajektorien im Phasenraum (13 Punkte = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2)

Bestimmen und zeichnen Sie die Phasenorbits für die folgenden Potentiale:

1. $V(q) = 0$.
2. $V(q) = -\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, wobei und $\omega > 0$ und m die Masse ist .
3. $V(q) = mgq$, wobei $g > 0$ und m die Masse ist.
4. $V(q) = \alpha\,|q|$, wobei $\alpha > 0$.
5. $V(q) = 0$ für $|q| < a$ und $V(q) = \infty$ für $|q| \geq a$.
6. Welche allgemeine Eigenschaft haben attraktive Potentiale im Vergleich zu repulsiven Potentialen?