THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 11 **26.01.2012**

Aufgabe 1: Druck eines entarteten Fermi-Gases (6 Punkte)

Berechnen Sie den Druck

$$p = g\,T \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \ln\left[1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}\right]$$

eines nichtrelativistischen entarteten Fermi-Gases für $T = 0$ durch direktes Auswerten des Integrals und zeigen Sie, dass die Relation

$$p = \frac{2}{5}\, n_0\, E_F$$

(Gl. (3.121) im Skript) erfüllt ist.

(Hinweis: führen Sie Kugelkoordinaten im Wellenzahlvektorraum ein und integrieren Sie partiell.)

Aufgabe 2: (12 Punkte = 4 + 4 + 4)

Der Druck eines relativistischen idealen Gases von Fermionen mit Spin 1/2 und keinen weiteren internen Freiheitsgraden lautet

$$p_f(T,\mu) = 2\,T \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \ln\left[1 + e^{-(\epsilon_k - \mu)/T}\right] + \ln\left[1 + e^{-(\epsilon_k + \mu)/T}\right] \right\} \;.$$

Hierbei berücksichtigt der Faktor 2 die zwei Spin-Einstellmöglichkeiten. Die Energie-Impuls-Beziehung für relativistische Teilchen lautet (in natürlichen Einheiten) $\epsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Der zweite Term in eckigen Klammern entspricht dem Beitrag der zugehörigen Antiteilchen, die in relativistischen Theorien gleichberechtigt mit Teilchen auftreten. Allerdings tragen diese das chemische Potential $-\mu$.
Der Druck eines relativistischen idealen Gases von Bosonen mit keinen weiteren internen Freiheitsgraden lautet

$$p_b(T,\mu) = -T \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \ln\left[1 - e^{-(\epsilon_k - \mu)/T}\right] \;.$$

Man beachte, dass für relativistische Bosonen stets $|\mu| \leq m$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass sich für ein System aus Quarks mit Masse $m = 0$ (ultrarelativistischer Grenzfall), welche N_c Farb- und N_f Flavor-Freiheitsgrade besitzen, der Druck zu

   $$p_q(T,\mu) = N_c N_f \left(\frac{7\pi^2}{180}\, T^4 + \frac{1}{6}\, \mu^2 T^2 + \frac{1}{12\pi^2}\, \mu^4 \right)$$

   berechnet.

2. Zeigen Sie, dass sich für ein System aus Gluonen (als Eichbosonen haben diese verschwindende Masse und zwei Polarisationsfreiheitsgrade) mit $N_c^2 - 1$ Farb-Freiheitsgraden der Druck zu

   $$p_g(T) = 2(N_c^2 - 1)\, \frac{\pi^2}{90}\, T^4$$

   berechnet.

3. Berechnen Sie die spezifische Wärme

   $$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V,N}$$

   für Quarks und Gluonen. Diskutieren Sie den Grenzfall $T \to 0$.

Anleitung: Benutzen Sie für Aufgabenteil 1. und 2. die Integrale

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}\ , \quad \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x+1} = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15}\ , \quad \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}\ .$$

Für Aufgabenteil 3. ist es zweckmäßig, den thermodynamischen Limes $V \to \infty$ zu betrachten und zu den unabhängigen Variablen T, μ überzugehen.

Aufgabe 3: Landau-Niveaus und magnetische Suszeptibilität (12 Punkte = 5 + 2 + 5)

1. Ein nichtrelativistisches Elektron in einem externen Magnetfeld H, welches in z–Richtung zeigt, wird durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

   $$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\ ,$$

   wobei $\vec{A} = (-Hy, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte die Form

   $$\epsilon(p_z, j) = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_0\left(j + \frac{1}{2}\right)\ ,\quad j = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

   haben, wobei $\omega_0 = eH/(mc)$. Man bezeichnet diese Energieeigenwerte als *Landau-Niveaus*.

   Anleitung:

   Bringen Sie die Schrödinger-Gleichung des Problems durch einen geschickten Ansatz auf die Form

   $$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(y-y_0)^2\right]\psi(y) = \epsilon'\,\psi(y)\ ,$$

   wobei $\epsilon' = \epsilon - p_z^2/(2m)$ und $y_0 = p_x c/(eH)$.

2. Betrachten Sie das System aus Aufgabenteil 1. in einem Volumen $V = L^3$. Zeigen Sie ausgehend von der allgemeinen Formel

   $$\ln \mathcal{Z} = \sum_i \ln\left[1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\right]\ ,$$

   dass die großkanonische Zustandssumme des Problems aus Aufgabenteil 1. die Form

   $$\ln \mathcal{Z} = \frac{2gL}{h}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^\infty dp\ \ln\left(1 + z e^{-\beta\left[\frac{p^2}{2m} + \hbar\omega_0\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]}\right)$$

   hat, wobei $g = \frac{eH}{hc}L^2$ die Entartung eines Landau-Niveaus ist. (Diese ergibt sich aus der Tatsache, dass der Energieeigenwert $\epsilon(p_z, j)$ nicht von p_x abhängt, der Quantisierung von p_x im Volumen V, $p_x = 2\pi/(\hbar L) n_x$, $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, und der Bedingung, dass die Werte von y_0 aus Aufgabenteil 1. innerhalb des Intervalls $[0, L]$ liegen müssen.)

3. Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = \partial\mathcal{M}/\partial H$ im thermischen Grenzfall, $\beta\mu \ll 1$, bzw. $z \ll 1$. Hierbei ist $\mathcal{M} = (k_B\, T/V)\partial \ln \mathcal{Z}/\partial H|_{T,V,z}$ die sog. *Magnetisierungsdichte*.

   Anleitung:

   - Entwickeln Sie $\ln \mathcal{Z}$ zunächst bis zur ersten Ordnung in z und dann bis zur zweiten Ordnung in H.
   - Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchenzahl N und $\ln \mathcal{Z}$ in niedrigster Ordnung in z übereinstimmen und bestimmen Sie z als Funktion von N, V und $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_BT)}$.