THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 3 **10.11.2011**

Aufgabe 1: Maximierung der Entropie (13 Punkte = 4 + 4 + 5)

Die eindimensionale Gaußverteilung mit verschwindendem Mittelwert, $\langle x \rangle = 0$, und quadratischer Schwankung, $\sigma^2 \equiv \overline{\Delta x}^2$, ist gegeben als (vgl. Aufgabe 1.2.)

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{mit} \ -\infty < x < \infty \quad .$$

1. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$1: \quad \int \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad , \tag{1}$$

$$2: \quad \int x^{2r} \exp(-\beta x^2) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r-1)}{2^r} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^{2r+1}}}, \quad \text{für } r = 1, 2, \dots \tag{2}$$

2. Berechnen Sie die statistische Entropie, $S \equiv -k \int W(x) \ln[W(x)] dx$, für diese Verteilung.

3. Zeigen Sie, dass für eine gegebene quadratische Schwankung, $\sigma^2 \equiv \int x^2 W(x) dx$, die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte mit der größten Entropie gerade die eindimensionale Gaußverteilung ist.
Tip: Führen Sie Lagrange-Multiplikatoren α und β ein, um die Normierung und die vorgegebene quadratische Schwankung zu berücksichtigen:

$$f[W(x)] \equiv S - \alpha \int W(x) dx - \beta \int x^2 W(x) dx \quad .$$

Aufgabe 2: Mehr zum Spinsystem (13 Punkte = 4 + 3 + 3 + 3)

1. Bestimmen Sie für das Spinsystem aus Aufgabe 2.3 die statistische Temperatur T als Funktion von Energie E und Spinanzahl N gemäß ihrer Definition

$$\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S(E,N)}{\partial E}\right|_N \, ,$$

wobei $S(E,N) = k_B \ln \Gamma(E,N)$ die statistische Entropie ist.

2. Unter welchen Umständen wird T negativ?

3. Drücken Sie E als Funktion von N, H und T aus.

4. Bestimmen Sie das magnetische Moment $\tilde{M} \equiv (n_1 - n_2)\mu$ des Systems als Funktion von N, H und T.

Aufgabe 3: Gase im Gleichgewicht (6 Punkte = 3 + 3)

Betrachten Sie zwei Gase mit den Entropien S_1 bzw. S_2, Volumen V_1 bzw. V_2, und innerer Energie E_1 bzw. E_2. Auf diese beiden Gase sollen keine externen Kräfte wirken und sie sollen miteinander im thermischen und mechanischen Kontakt stehen. Das Gesamtsystem soll isoliert sein, d.h. es hat konstantes Volumen, $V \equiv V_1 + V_2$, und konstante innere Energie, $E \equiv E_1 + E_2$.

1. Betrachten Sie V_1 und S_1 als unabhängige Größen und beweisen Sie die folgenden Relationen

$$
\begin{aligned}
\text{(a):} \quad & \left.\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right|_{S_1} = -1, \\
\text{(b):} \quad & \left.\frac{\partial S_2}{\partial V_1}\right|_{S_1} = \left[\left.\frac{\partial E_2}{\partial V_2}\right|_{S_2} - \left.\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right|_{S_1} \right] \Bigg/ \left.\frac{\partial E_2}{\partial S_2}\right|_{V_2}, \\
\text{(c):} \quad & \left.\frac{\partial V_2}{\partial S_1}\right|_{V_1} = 0, \\
\text{(d):} \quad & \left.\frac{\partial S_2}{\partial S_1}\right|_{V_1} = - \left.\frac{\partial E_1}{\partial S_1}\right|_{V_1} \Bigg/ \left.\frac{\partial E_2}{\partial S_2}\right|_{V_2}.
\end{aligned}
$$

2. Im Gleichgewicht wird die Entropie, $S \equiv S_1 + S_2$, extremal. Zeigen Sie, ausgehend von dieser Bedingung, dass im mechanischen Gleichgewicht, d.h. $p \equiv p_1 = p_2$ (wobei $p = -\partial E/\partial V|_S$ der Druck ist) die Gleichung
$$\left.\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right|_{S_1} = \left.\frac{\partial E_2}{\partial V_2}\right|_{S_2}$$
und im thermischen Gleichgewicht, d.h. $T \equiv T_1 = T_2$ (wobei $T = \partial E/\partial S|_V$ die Temperatur ist) die Gleichung
$$\left.\frac{\partial E_1}{\partial S_1}\right|_{V_1} = \left.\frac{\partial E_2}{\partial S_2}\right|_{V_2}$$
gelten muß.