# THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

**Aufgabenblatt 4** **17.11.2011**

*Aufgabe 1: Spinsysteme* (12 Punkte = 5 + 5 + 2)

Zwei Spinsysteme $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ stehen im thermischen Kontakt miteinander, über diesen Kontakt findet ein Energieaustausch $\Delta E$ statt. Die Spinsysteme sind ähnlich dem Spinsystem aus Aufgabe 2.3, mit den Spinzahlen $N_1$, $N_2$ und den Energien $E_1$, $E_2$. Die Überschüsse an Spins, die parallel zum äußeren Feld $H$ stehen, seien mit $M_1, M_2$ bezeichnet, so dass $E_i = -\mu\, H\, M_i$, $i = 1, 2$, mit dem magnetischen Moment $\mu$ eines einzelnen Spins. Ein minimaler Energieaustausch $\delta E$ besteht darin, dass ein Spin in einem der beiden Systeme umklappt und dabei den umgekehrten Umklapprozess bei einem Spin des anderen Systems induziert. Ein solcher Prozess ändert nicht die Gesamtenergie des Systems $E = E_1 + E_2$. Für einen größeren Energieaustausch $\Delta E$ klappen mehrere Spins gleichzeitig um.

1. Geben Sie die mikrokanonische Zustandssumme für das Gesamtsystem an.
2. Bestimmen Sie die wahrscheinlichste Konfiguration des Gesamtsystems (hinsichtlich der Aufteilung der Energie auf die beiden Einzelsysteme) unter der Annahme, dass für diese Konfiguration in beiden Systemen eine makroskopisch große Anzahl von Spins parallel und antiparallel zum Magnetfeld stehen.
3. Nehmen Sie an, dass ausgehend von der wahrscheinlichsten Konfiguration ein plötzlicher Energieaustausch zwischen den Systemen eine Anzahl $m = 10^{-10} N_1$ Spins umklappt. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis relativ zur wahrscheinlichsten Konfiguration? (Nehmen Sie für die konkrete Berechnung der Einfachheit halber $N_1 = N_2 = 10^{22}$ an.)

*Aufgabe 2: Kanonische Zustandssumme eines anharmonischen Oszillators* (10 Punkte = 5 + 3 + 2)

Das Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators sei gestört durch den Term $-gx^3$.

$$V(x) = cx^2 - gx^3.$$

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z$ und die mittlere Energie als Störungsreihe in $g$ bis zur Ordnung $O(g^3)$. Unter welcher Bedingung ist eine solche Entwicklung sinnvoll?

*Aufgabe 3: Ideales Gas im Schwerefeld* (8 Punkte = 4 + 4)

Ein atomares nicht wechselwirkendes Gas konstanter Temperatur und konstanter Teilchenzahl befinde sich in einem unendlich hohen Zylinder der Grundfläche $A_{x,y}$. Der Zylinder befinde sich im Schwerefeld $V = mgz$. Berechnen Sie für dieses System

1. die totale Teilchendichte $\langle \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right) \rangle$ und
2. die totale Impulsverteilung $\langle \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\vec{p}_i - \vec{p}\right) \rangle$

als Funktion der Höhe $z$.