

Aufgabenblatt 6

1.12.2011

Aufgabe 1: Ultrarelativistisches ideales Gas im kanonischen Ensemble (10 Punkte = 4 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1)

Gegeben sei ein ultrarelativistisches ideales Gas ($\varepsilon_i = |\vec{p}_i|c$ ist die Energie des i ten Teilchens im ultrarelativistischen Limes.).

1. Leiten Sie die Zustandssumme $Z(T, V, N)$ im kanonischen Ensemble her.
2. Berechnen Sie daraus die freie Energie $F(T, V, N)$,
3. den Druck $p(T, V, N)$,
4. das chemische Potential $\mu(T, V, N)$,
5. die Entropie $S(T, V, N)$ und
6. die innere Energie $E(T, V, N)$.

Aufgabe 2: Fluktuationen im großkanonischen Ensemble (6 Punkte = 2 + 2 + 2)

Betrachten Sie ein System bei konstantem Volumen ($dV = 0$), das im thermischen Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur T steht. Mit diesem Reservoir können Teilchen (bei gegebenem chemischen Potential μ) ausgetauscht werden. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für die Fluktuationen der Teilchenzahl N und der Energie E im großkanonischen Ensemble

1. $\langle \Delta E^2 \rangle = k_B T^2 \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right|_{\mu} + \frac{\mu}{\beta} \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} \right|_T$,
2. $\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_T$,
3. $\langle \Delta E \Delta N \rangle = \frac{1}{\beta} \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} \right|_T$,

mit $\Delta X \equiv X - \langle X \rangle$ und $\beta = (k_B T)^{-1}$.

Aufgabe 3: Ideales Gas im Schwerfeld (14 Punkte = 3 + 2 + 4 + 3 + 2)

Gegeben sei ein ideales, einatomiges Gas mit konstanter Temperatur T . Es befinde sich in einem homogenen Schwerfeld $V_{\text{pot}} = mgz$ in einem Zylinder mit konstanter Grundfläche A (parallel zur xy -Ebene) und der Höhe h .

1. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, A, h, N)$ für das Gas. Berechnen Sie den Limes $h \rightarrow \infty$.
2. Bestimmen Sie die mittlere Energie und die Entropie des Gases.
3. Bestimmen Sie die Anzahl von Teilchen $n(z)dz$, die sich zwischen den Höhen z und $z + dz$ befinden. Bestimmen Sie daraus den Druck als Funktion der Höhe z .
4. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}(T, A, h, \mu)$. Berechnen Sie den Limes $h \rightarrow \infty$.
5. Bestimmen Sie die mittlere Energie und die Entropie des Gases.