

Aufgabe 1: von der Test-Klausur... (5 Punkte = 2 + 3)

Gegeben sei ein Gas aus N Teilchen mit Masse m , wobei jedes Teilchen die potentielle Energie

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

habe.

1. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, N)$ für das System unter der Annahme, dass die Teilchen identisch sind.
2. Berechnen Sie den Druck als Funktion der Koordinaten x, y, z .

Aufgabe 2: Zwei-Niveau Quanten-System (8 Punkte = 2 + 2 + 2 + 2)

Gegeben sei ein Teilchen, das nur zwei Energieniveaus $|E_1\rangle$ (mit Eigenwert E_1) und $|E_2\rangle$ (mit Eigenwert E_2) annehmen kann.

1. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T)$ für dieses System.
2. Bestimmen Sie die Matrix-Elemente $\langle E_n | \hat{\rho} | E_k \rangle \forall n, k$, wobei $\hat{\rho}$ die Dichtematrix ist.
3. Bestimmen Sie die mittlere Energie, die freie Energie und die Entropie des Systems.
4. Gegeben seien $N \gg 1$ ununterscheidbare Teilchen der o.a. Art. Bestimmen Sie $Z(T, N)$ und die freie Energie $F(T, N)$.

Aufgabe 3: Ideales Gas in der Quantenstatistik (17 Punkte = 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4)

Gegeben sei ein Teichen mit Masse m im eindimensionalen Potential

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq L/2, \\ \infty & \text{für } |x| > L/2. \end{cases} \quad (2)$$

1. Bestimmen Sie die Energien E_n ($n = 1, 2, \dots$) für dieses Quantensystem.
2. Bestimmen Sie die Zustandssumme $Z(T, L, 1)$.
3. Berechnen Sie die Zustandssumme unter der Annahme, dass $\frac{\lambda}{L} \ll 1$, wobei $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$. (Hinweis: in diesem Limes kann die Summe in $Z(T, L, 1)$ in ein Gauß-Integral umgeschrieben werden).
4. Verallgemeinern Sie das Resultat auf den dreidimensionalen Fall mit Potential $U(x, y, z) = U(x)U(y)U(z)$. Berechnen Sie in diesem Fall $Z(T, V, 1)$, wobei $V = L^3$.
5. Bestimmen Sie $Z(T, V, N)$ für das System von Aufgabenteil 4. unter der Annahme, dass die Teilchen ununterscheidbar sind.
6. Bestimmen Sie aus $Z(T, V, N)$ Druck, mittlere Energie und Entropie.