THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 8 **22.12.2011**

Aufgabe 1: Klassisches (groß)kanonisches Ensemble (14 Punkte = 1 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3)

Gegeben sei ein Gas aus N Teilchen mit Masse m, wobei auf jedes Teilchen das Potential

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 + F(x,y) \text{ , wobei } F(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ für } x^2+y^2 \leq R^2 \text{ ,} \\ \infty \text{ für } x^2+y^2 > R^2 \text{ ,} \end{cases} \tag{1}$$

wirke.

1. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(\vec{\pi})$.
2. Bestimmen Sie im kanonischen Ensemble $Z(T, N)$ für das System unter der Annahme, dass die Teilchen identisch sind.
3. Bestimmen Sie die freie Energie F.
4. Bestimmen Sie die mittlere Energie $\mathcal{E}$.
5. Berechnen Sie die Entropie S.
6. Berechnen Sie den Druck $p = p(z)$.
7. Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}(T, \mu)$.

Aufgabe 2: Reales Gas (4 Punkte = 1 + 3)

Im Skript wurde die Zustandsgleichung eines realen Gases hergeleitet:

$$\left[p + a\left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{V}}\right)^2\right](\mathcal{V} - b\mathcal{N}) = \mathcal{N}k_B T \text{ .} \tag{2}$$

1. Bei gegebener mittlerer Teilchenzahl $\mathcal{N}$ und gegebener Temperatur T divergiert der Druck für $\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{V}} \to 1/b$. Erklären Sie die physikalische Bedeutung dieser Divergenz.
2. Bestimmen Sie die mittlere Energie eines realen Gases.

Aufgabe 3: Geschwindigkeitsverteilung (6 Punkte)

In Aufgabe 7.3 wurde ein System von N Teilchen untersucht, wobei jedes Teilchen in einer dreidimensionalen Box konfiniert ist. Berechnen Sie für dieses System die Geschwindigkeitsverteilung $n(\vec{v})$. (Zur Erinnerung: $n(\vec{v})d^3\vec{v}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen die Geschwindigkeit im Intervall $\vec{v}$ and $\vec{v} + d^3\vec{v}$ hat.)

Aufgabe 4: Quantenstatistik eines harmonischen Oszillators (11 Punkte = 3 + 4 + 2 + 2)

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m in einem eindimensionalen Potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T)$.
2. Berechnen Sie die freie Energie F, die mittlere Energie $\mathcal{E}$, die Entropie S und die spezifische Wärme C_V.
3. Verallgemeinern Sie das Problem auf ein dreidimensionales Potential $U(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.
4. Berechnen Sie für den Aufgabenteil 3. die freie Energie F, die mittlere Energie $\mathcal{E}$, die Entropie S und die spezifische Wärme C_V.

Aufgabe 5: Entropie (4 Punkte = 1 + 3)

Gegeben sei die folgende Dichtematrix für ein Zwei-Niveau-System in einer geeigneten Basis:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

1. Bestimmen Sie die Entropie dieses Systems.

2. Berechnen Sie p_1 und p_2 unter der Annahme, dass die Entropie maximal ist.

Aufgabe 6: Störungstheorie (11 Punkte = 1 + 2 + 3 + 2 + 3)

Gegeben sei ein Teichen mit Masse m im eindimensionalen Potential

$$U_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } |x| \leq L/2 \, , \\ \infty \text{ für } |x| > L/2 \, . \end{cases} \tag{4}$$

Betrachten Sie die Störung

$$U_1(x) = \alpha\delta(x) \, , \tag{5}$$

wobei $\delta(x)$ die Dirac-Funktion ist.

1. Bestimmen Sie die Dimension des Parameters α.

2. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenfunktionen für $\alpha = 0$.

3. Bestimmen Sie die Energieniveaus bis zur ersten Ordnung in α.

4. Unter welcher Voraussetzung ist diese Störungsrechnung zuverlässig?

5. Bestimmen Sie die Zustandssumme bis zur ersten Ordnung in α unter der Annahme, dass $\frac{\lambda}{L} \ll 1$, wobei $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!