THEORETIKUM ZUR STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

Aufgabenblatt 9 **12.1.2012**

Aufgabe 1: Spin, Isospin und Farbe (9 Punkte = 3 + 2 + 4)

1. Gegeben seien zwei Fermionen mit Spin 1/2, die einen gebundenen Zustand bilden. Die Gesamtwellenfunktion sei gegeben durch

$$|\Phi_2\rangle = |\text{Raum: } \ell\rangle\, |\text{Spin}\rangle \ , \tag{1}$$

wobei ℓ den Drehimpuls im Schwerpunktsystem der beiden Teilchen darstellt. Bestimmen Sie den Zustand $|\text{Spin}\rangle$ (i) wenn $\ell = 0$ und (ii) wenn $\ell = 1$.

2. Das Deuteron ist ein gebundener Zustand aus Proton (p) und Neutron (n). In der Physik der starken Wechselwirkung gibt es den sog. *Isospin*, der sich mathematisch ganz ähnlich wie der Spin verhält. Proton und Neutron können als Basisvektoren des zweidimensionalen *Isospin-Raums* $\mathcal{H}_I$ angesehen werden, $|p\rangle = (1,0)^T$, $|n\rangle = (0,1)^T$. Die Gesamtwellenfunktion des Deuterons lautet

$$|\Phi_2\rangle = |\text{Raum: } \ell = 0\rangle\, |\text{Spin} = 1\rangle\, |\text{Isospin}\rangle \ . \tag{2}$$

Bestimmen Sie $|\text{Isospin}\rangle$.

3. Das Baryon Δ^{++} besteht aus drei sog. *up*-Quarks u. Wenn alle Spins nach oben zeigen, hat man eine Wellenfunktion der Form $|\Delta^{++}\rangle = |u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle$, die total symmetrisch ist. (Der hier nicht angegebene Raum-Anteil der Wellenfunktion ist ebenfalls symmetrisch). Das ist natürlich in Konflikt mit dem Pauli-Prinzip. Aus diesem Grund wurde eine neue Quantenzahl postuliert, die "Farbe" genannt wurde. Jedes Quark kann in drei Farben auftreten, rot, grün oder blau: $|R\rangle$, $|G\rangle$ und $|B\rangle$. Die Wellenfunktion lautet nun

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = |u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle\, |\text{Farbe}\rangle \ . \tag{3}$$

Bestimmen Sie $|\text{Farbe}\rangle$.

Aufgabe 2 Thermodynamische Selbst-Konsistenz (8 Punkte = 4 + 4)

1. Gegeben sei die kanonische Zustandssumme $Z(T,V)$. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\varepsilon = T\frac{dp}{dT} - p \ , \tag{4}$$

wobei $\varepsilon = \mathcal{E}/V$ die Energiedichte ist und p der Druck ist. Gleichung (4) ist die Bedingung für die *thermodynamische Selbst-Konsistenz* einer gegebenen Zustandsgleichung, d.h. Druck $p(T)$ und Energiedichte $\varepsilon(T)$ müssen dergestalt miteinander in Beziehung stehen, dass Gl. (4) erfüllt ist.

2. Zeigen Sie dass die Entropiedichte $s = S/V$ wie folgt berechnet werden kann:

$$s = \frac{\varepsilon + p}{T} \ . \tag{5}$$

Aufgabe 3: Bose-Verteilung (13 Punkte = 2 + 2 + 5 + 4)

1. Gegeben seien N harmonische Oszillatoren mit Frequenzen ω_i mit $i = 1, 2, \ldots, N$. Zeigen Sie, dass

$$\ln Z_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \ln Z_i \ , \tag{6}$$

wobei Z_i die Zustandssumme des i-ten Oszillators ist (Z_i wurde bereits in Aufgabe 8.4 berechnet).

2. Gegeben seien unendlich viele Oszillatoren mit

$$\omega(\vec{n}) = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \left(\frac{2\pi c\,\vec{n}}{L}\right)^2} \ , \tag{7}$$

   wobei m eine Konstante und $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ein dimensionsloser dreidimensionaler Vektor aus ganzen Zahlen, $n_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3$, ist. Zeigen Sie, dass für $L \to \infty$ gilt:

$$\ln Z_{tot} = -V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \ln\left[1 - e^{-\beta\, c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}}\right] \ , \tag{8}$$

   wobei $\vec{p} = (2\pi\hbar/L)\,\vec{n}$ und $V = L^3$.

3. Schreiben Sie die mittlere Energiedichte in der Form

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{V} = \int_0^\infty d\omega u(\omega) \ . \tag{9}$$

   Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion $u(\omega)$.

4. Studieren Sie den Fall $m = 0$. Bestimmen Sie die Funktionen $\varepsilon(T)$ und $p(T)$ und zeigen Sie, dass Gl. (4) erfüllt ist.