KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK UND STATISTISCHEN MECHANIK WS 2011/2012

29.02.2012

Aufgabe 1: Schrödinger-Gleichung (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($9 = 1 + 3 + 3 + 2$ Punkte).

   (a) Geben Sie die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m unter der Wirkung des Potentials $V(x)$ an.

   (b) Leiten Sie die entsprechende eindimensionale Kontinuitätsgleichung her und erklären Sie ihre physikalische Bedeutung.

   (c) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$ hermitesch ist.

   (d) Geben Sie eine Wellenfunktion an, die Eigenzustand von $\hat{p}_x$ ist.

2. Rechenaufgabe ($12 = 2 + 5 + 5$ Punkte).
   Gegeben sei die folgende eindimensionale Wellenfunktion

$$\psi(x) = N \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right) \quad , \tag{1}$$

   die eine stationäre Schrödinger-Gleichung mit Potential $V(x)$ erfüllt.

   (a) Bestimmen Sie die komplexe Zahl N. (**Hinweis**: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$, wobei $b > 0$).

   (b) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und Δx.

   (c) Bestimmen Sie $\langle p \rangle$. Dann bestimmen Sie die untere Grenze für $\langle p^2 \rangle$, ohne eine explizite Rechnung für $\langle p^2 \rangle$ durchzuführen.

Aufgabe 2: Hilbert-Raum (18 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($7 = 2 + 1 + 1 + 3$ Punkte).

   (a) Gegeben sei eine Menge $\{|n\rangle\}$ von Zustandsvektoren, $n = 1, 2, \ldots$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Menge eine Orthonormalbasis bildet?

   (b) Gegeben sei ein Operator A. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit A ein linearer Operator ist?

   (c) Geben Sie die Definition von $A^\dagger$ an.

   (d) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators A reell sind.

2. Rechenaufgabe ($11 = 1 + 3 + 4 + 3$ Punkte).
   Gegeben sei der folgende Zustand (zum Zeitpunkt $t = 0$)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |+\rangle + \beta |-\rangle \quad , \tag{2}$$

   wobei $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet.

   (a) Bestimmen Sie β unter der Annahme, dass es reell und positiv ist.

   (b) Gegeben sei der Operator $O_+ = |+\rangle\langle+|$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von O_+.

   (c) Eine Messung des Operators O_+ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführt. Bestimmen Sie die möglichen Resultate der Messung und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Wie lautet der Zustand des Systems unmittelbar nach der Messung?

   (d) Bestimmen Sie einen Zustand $|\psi\rangle_\perp$, der orthogonal zu $|\psi\rangle$ ist.

Aufgabe 3: Dichtematrix (18 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($7 = 2 + 3 + 2$ Punkte).

   (a) Geben Sie die Definition der Dichtematrix $\hat{\rho}$ an und zeigen Sie, dass $Tr[\hat{\rho}] = 1$.

   (b) Bestimmen Sie $d\hat{\rho}/dt$.

   (c) Wie lautet $\hat{\rho}$ im kanonischen Ensemble?

2. Rechenaufgabe ($11 = 1 + 3 + 4 + 3$ Punkte).

   Gegeben sei ein Teilchen, das nur drei Energieniveaus $|E_1\rangle$ (mit Eigenwert E_1), $|E_2\rangle$ (mit Eigenwert E_2) und $|E_3\rangle$ (mit Eigenwert E_3) annehmen kann.

   (a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T)$ für dieses System.

   (b) Bestimmen Sie die Matrix-Elemente $\langle E_n | \, \hat{\rho} \, | E_k \rangle \; \forall \; n, k$, wobei $\hat{\rho}$ die Dichtematrix ist. (Schreiben Sie $\hat{\rho}$ auch explizit als 3×3 Matrix.)

   (c) Bestimmen Sie die freie Energie, die mittlere Energie und die Entropie des Systems.

   (d) Gegeben seien $N \gg 1$ unterscheidbare Teilchen der o.a. Art. Bestimmen Sie $Z(T, N)$ und die freie Energie $F(T, N)$.

Aufgabe 4: Verteilungen (22 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($10 = 2 + 3 + 3 + 2$ Punkte).

   (a) Wie lautet das Spin-Statistik-Theorem?

   (b) Geben Sie die Bose-Einstein-Verteilung $n_B(\epsilon_i, T, \mu)$ als Funktion der Temperatur T, der Energie ϵ_i und des chemischen Potentials μ an. Erklären Sie, warum $\mu < \epsilon_0$ impliziert, dass keine Singularitäten auftreten (ϵ_0 ist die Energie des Grundzustands).

   (c) Geben Sie die Fermi-Dirac-Verteilung $n_F(\epsilon_i, T, \mu)$ als Funktion der Temperatur T, der Energie ϵ_i und des chemischen Potentials μ an. Zeigen Sie, dass $\lim_{T \to 0} n_F(\epsilon_i, T, \mu) = \theta(\mu - \epsilon_i)$. Zeichnen Sie $n_F(\epsilon_i, T, \mu)$ als Funktion von ϵ_i für gegebenes μ und für verschiedene Werte von T.

   (d) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit beide Verteilungen durch die Boltzmann-Verteilung approximiert werden können.

2. Rechenaufgabe ($12 = 4 + 4 + 2 + 2$ Punkte).

   Gegeben sei die folgende Zustandssumme Z_{tot}:

$$\ln Z_{tot} = -2\,V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \ln\left(1 - e^{-\beta\, c |\vec{p}|}\right) \quad . \tag{3}$$

   (a) Zeigen Sie, dass

$$\ln Z_{tot} = \frac{V (k_B T)^3}{(\hbar c)^3} \frac{\pi^2}{45} \quad . \tag{4}$$

   (Hinweis: schreiben Sie das Integral in Kugelkoordinaten und benutzen Sie: $\int_0^\infty da a^2 \ln(1 - e^{-a}) = -\frac{\pi^4}{45}$ wobei $a > 0$.)

   (b) Bestimmen Sie den Druck p, die Energiedichte ε und die Entropiedichte s.

   (c) Prüfen Sie, ob die thermodynamische Selbstkonsistenz erfüllt ist.

   (d) Welches physikalische System wird durch Z_{tot} beschrieben?