WIEDERHOLUNGSKLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK UND STATISTISCHEN MECHANIK
WS 2011/2012

12.04.2012

Aufgabe 1: Schrödinger-Gleichung (18 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($8 = 1 + 4 + 3$ Punkte).

   (a) Geben Sie die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Masse m unter der Wirkung des Potentials $V(x)$ an.

   (b) Leiten Sie die entsprechende eindimensionale zeitunabhängige (stationäre) Schrödinger-Gleichung her. (Hinweis: machen Sie den Separationsansatz $\psi(t,x) = \varphi(t)\phi(x)$.)

   (c) Beschreiben Sie die wichtigsten Eigenschaften des nuklearen α-Zerfalles. (Zeichnen Sie dabei das Potential, das auf das α-Teilchen wirkt).

2. Rechenaufgabe ($10 = 1 + 3 + 6$ Punkte).

   Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ für } |x| < 1 \\ 0 \text{ für } |x| > 1 \end{cases} , \tag{1}$$

   welches in einer stationären Schrödinger-Gleichung auftritt.

   (a) Zeichnen Sie das Potential.

   (b) Gegeben sei ein physikalischer Zustand mit Energie $E = 1/2$. Bestimmen Sie die klassisch erlaubten und verbotenen Bereiche für das Teilchen.

   (c) Berechnen Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit T. Hinweis: $\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$.

Aufgabe 2: Hilbert-Raum (22 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($8 = 1 + 2 + 4 + 1$ Punkte).

   (a) Gegeben sei der Hamilton-Operator H. Zeigen Sie, dass der zeitabhängige Zustand $|s(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |s_0\rangle$ die Schrödinger-Gleichung erfüllt.

   (b) Berechnen Sie $\langle s(t)| s(t)\rangle$.

   (c) Gegeben sei der Operator A_S in der Schrödinger-Darstellung. Es sei angenommen, dass A_S keine explizite Zeitabhängigkeit hat. Geben Sie A_H in der Heisenberg-Darstellung an und berechnen Sie dA_H/dt.

   (d) Welche Bedingung muß der Operator $A_H(t)$ erfüllen, um eine Konstante der Bewegung zu sein?

2. Rechenaufgabe ($14 = 1 + 2 + 3 + 5 + 3$ Punkte).

   Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = E_1 |E_1\rangle \langle E_1| + E_2 |E_2\rangle \langle E_2| \ , \tag{2}$$

   wobei $\{|E_1\rangle , |E_2\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet und E_1 und E_2 reelle Zahlen sind mit $E_1 < E_2$.

   (a) Welche sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von H?

   (b) Ist der Operator $A = \alpha |E_1\rangle \langle E_2|$ hermitesch? Wie lautet $A + A^\dagger$?

   (c) Sei zur Zeit $t = 0$ der physikalische Zustand des Systems gegeben durch $|s(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |E_2\rangle$. Bestimmen Sie $|s(t)\rangle$.

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System $|s(t)\rangle$ zur Zeit $t > 0$ im Zustand $|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle$ zu finden. Hinweis: Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsamplitude ist $a(t) = \langle u|\, s(t)\rangle$.

(e) Für welche Werte von t ist die Wahrscheinlichkeit von Aufgabenteil (d) 0 und für welche Werte 1?

Aufgabe 3: Klassische Statistische Mechanik (19 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($6 = 2 + 1 + 3$ Punkte).

   (a) Geben Sie die Definition der kanonischen Zustandssumme in der klassischen statistischen Mechanik für ein System mit N ununterscheidbaren Teilchen und mit der Hamilton-Funktion $H = H(\vec{\pi})$ an. Worüber wird integriert? Was bedeutet der Vorfaktor $\frac{1}{h^{3N}}\frac{1}{N!}$?

   (b) Wie berechnet man im kanonischen Ensemble den Mittelwert einer Funktion $F = F(\vec{\pi})$?

   (c) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass für den Fall $H(\vec{\pi}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + V(\vec{q})$ gilt:

   $$Z(T,N) = \frac{1}{\lambda^{3N} N!} \int d^{3N}\vec{q}\, e^{-\beta V(\vec{q})} \ ,$$

   wobei $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$.

2. Rechenaufgabe ($13 = 6 + 4 + 3$ Punkte).

   (a) Gegeben sei die kanonische Zustandssumme $Z(T,V,N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$. Bestimmen Sie die Energiedichte, den Druck und die Entropie.

   (b) Gegeben seien zwei Systeme von derselben Sorte wie im vorherigen Aufgabenteil: 'Schachtel' A mit N_A Teilchen mit Masse m bei Temperatur T_A und Volumen V_A; 'Schachtel' B mit N_B Teilchen mit Masse m bei Temperatur T_B und Volumen V_B. Wie lautet die Zustandssumme und die Energiedichte für das Gesamtsystem $A + B$?

   (c) Die zwei Schachteln A und B werden zusammengebracht und die die beiden Systeme trennende Wand wird entfernt. Nach einer gewissen Zeit erreicht das System das Gleichgewicht bei einer Temperatur T. Bestimmen Sie diese Temperatur, unter der Annahme, dass das System keinen Energieaustausch mit der Umgebung hat. (Hinweis: Energieerhaltung).

Aufgabe 4: Quantenstatistik (21 Punkte)

1. Theoretischer Teil ($5 = 2 + 3$ Punkte).

   (a) Geben Sie die Definition der Dichtematrix $\hat{\rho}$ im kanonischen und im großkanonischen Ensemble an.

   (b) Nennen Sie den zweiten Hauptstatz der Thermodynamik und erklären Sie seine physikalische Bedeutung.

2. Rechenaufgabe ($16 = 1 + 4 + 3 + 2 + 3 + 3$ Punkte).

   Gegeben sei das folgende Potential für ein Teilchen der Masse m:

   $$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega \ . \tag{3}$$

   (a) Geben Sie die Eigenwerte für dieses Quantensystem an.

   (b) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme lautet:

   $$Z(T) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \ , \text{ wobei } \beta = \frac{1}{k_B T} \ . \tag{4}$$

   (c) Bestimmen Sie $\hat{\rho}$ für dieses System.

   (d) Gegeben seien N ununterscheidbare Teilchen einer Sorte. Wie lautet $Z_N(T,N)$?

   (e) Bestimmen Sie aus Z_N vom vorherigen Aufgabenteil die Energiedichte ε.

   (f) Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}(T,\mu)$.