(TEST-)KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK UND STATISTISCHER MECHANIK WS 2011/2012

15.12.2011

Aufgabe 1: Schrödinger-Gleichung (20 Punkte)

1. Theoretischer Teil (8 = 1 + 2 + 3 + 2 Punkte).
   (a) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen Fall an. $V(x)$ sei das Potential und $\psi(t,x)$ die Wellenfunktion.
   (b) Geben Sie die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(t,p)$ im Impulsraum an.
   (c) Bestimmen Sie die Schrödinger-Gleichung für $\tilde{\psi}(t,p)$.
   (d) Erklären Sie die physikalische Bedeutung von $|\psi(t,x)|^2$ und $\left|\tilde{\psi}(t,p)\right|^2$.

2. Rechenaufgabe (12 = 2 + 3 + 3 + 4 Punkte).
   Gegeben sei die folgende Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$

$$\psi(0,x) = N\sqrt{1-x^2}\theta(1-x^2) \ . \tag{1}$$

   (x wird in Einheiten [m] gemessen.)
   (a) Bestimmen Sie die komplexe Zahl N.
   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Ortsintervall $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ bei einer Ortsmessung zur Zeit $t = 0$ zu finden.
   (c) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und Δx.
   (d) Bestimmen Sie $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ und Δp. Prüfen Sie, ob das Produkt $\Delta x \Delta p$ die Unschärferelation erfüllt.

Aufgabe 2: Wasserstoffatom und Hilbert-Raum (19 Punkte)

1. Theoretischer Teil (8 = 2 + 3 + 3 Punkte).
   (a) Gegeben seien zwei hermitesche Operatoren A und B. Zeigen Sie, dass der Kommutator $[A, B]$ antihermitesch ist.
   (b) Beweisen Sie, dass $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.
   (c) Wie lautet die Unschärferelation $\Delta L_x \Delta L_y$? In welchem Fall ist eine exakte Kenntnis von L_x und L_y möglich?

2. Rechenaufgabe (11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 Punkte).
   Gegeben sei der folgende Zustand eines Elektrons, das Bestandteil eines Wasserstoffatoms ist:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1,0,0\rangle + \beta\,|2,0,0\rangle + \gamma\,(|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle + |2,1,1\rangle) \ , \tag{2}$$

   wobei die Notation $|n\ell m\rangle$ für die Eigenzustände des Elektrons benutzt wurde.
   (a) Welche Bedingungen müssen die Konstanten α, β und γ erfüllen, damit die Normierungsbedingung für $|\psi\rangle$ erfüllt ist?
   (b) Welche Bedingungen müssen die Konstanten α, β und γ erfüllen, damit $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand der Energie ist? Bestimmen Sie auch die möglichen Eigenwerte.
   (c) Welche Bedingungen müssen die Konstanten α, β und γ erfüllen, damit $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\vec{L}^2$ ist? Bestimmen Sie auch die möglichen Eigenwerte.

(d) Welche Bedingungen müssen die Konstanten γ, β und γ erfüllen, damit $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von L_z ist? Bestimmen Sie auch die möglichen Eigenwerte.

(e) Bestimen Sie die Konstanten α, β und γ unter den Annahmen, dass (i) sie reell sind, (ii) $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand des Hamilton-Operators ist und (iii) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von $\vec{L}^2$ den Wert $2\hbar^2$ zu bekommen, 1/2 ist.

Aufgabe 3: Ensembles (20 Punkte)

1. Theoretischer Teil (5 Punkte).

   Geben Sie die Definitionen der normierten Wahrscheinlichkeitsdichten $\rho(\vec{\pi})$ für das mikrokanonische, kanonische und großkanonische Ensemble an. Erklären Sie die Unterschiede und ihre physikalischen Bedeutungen.

2. Rechenaufgabe (15 = 1 + 5 + 3 + 3 + 3 Punkte).

   Gegeben sei ein Gas aus N Teilchen mit Masse m, wobei auf jedes Teilchen das Potential

   $$U(x, y, z) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \tag{3}$$

   wirkt.

   (a) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(\vec{\pi})$.

   (b) Bestimmen Sie im kanonischen Ensemble die Zustandssumme $Z(T, N)$ für das System unter der Annahme, dass die Teilchen identisch sind.

   (c) Bestimmen Sie die freie Energie F.

   (d) Bestimmen Sie die Entropie S.

   (e) Bestimmen Sie die mittlere Energie $\mathcal{E}$.

Aufgabe 4: Ensembles (15 Punkte)

1. Theoretischer Teil (5 = 2 + 3 Punkte)

   (a) Geben Sie den ersten Hauptsatz der Thermodynamik an und erklären Sie seine physikalische Bedeutung.

   (b) Was versteht man unter chemischem Gleichgewicht und chemischem Potential?

2. Rechenaufgabe (10 = 4 + 3 + 3 Punkte)

   (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}(T, \mu)$ für das Problem aus Aufgabe 3.2.

   (b) Bestimmen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$.

   (c) Bestimmen Sie die mittlere Energie $\mathcal{E}$.