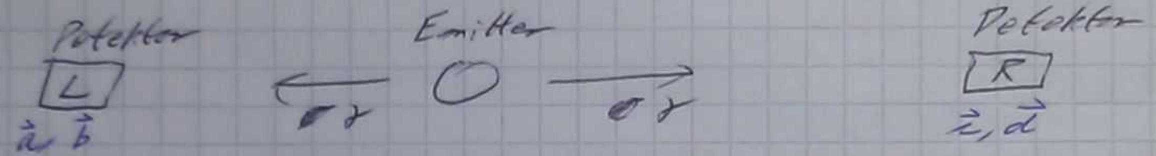
# Bellsche Ungleichung

- 1964 von John Bell (Irischer Physiker) als Antwort auf EPR formuliert: „On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox"
- vorher: unklar, ob QM durch „fundamentalere" lokale realistische Theorie ersetzt werden muss
- Bell zeigt: lokal-realistische Theorie nicht möglich

**Experiment:**




zwei Photonen mit Spin 1 fliegen diametral auf zwei Detektoren L und R. Dort Messung der Spinkomponente bezüglich $\vec{a}$ ~~und~~ oder $\vec{b}$ an L und bezüglich $\vec{c}$ ~~und~~ oder $\vec{d}$ an R. Ergebnis ist jeweils $\pm 1$:

**Klassisch:**

| $c$ | $d$ | $(c+d)$ | $(c-d)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | 2 |
| -1 | 1 | 0 | -2 |
| -1 | -1 | -2 | 0 |

$$\Rightarrow \quad a(c+d) + b(c-d) = \pm 2$$

mit $\langle a c\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i c_i$ / Mittelwert aus $N$ Durchführungen des Experiments

folgt: $|\langle ac\rangle + \langle ad\rangle + \langle bc\rangle - \langle bd\rangle| \leq 2$

Bellsche Ungleichung

in QM: allgemein: $\langle ac \rangle = \langle \psi | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (\vec{c} \cdot \vec{\sigma}) | \psi \rangle$

$\uparrow$ Pauli-Matrizen

Annahme: Photonen in Singulettzustand: antiparallel

$$\Rightarrow \overbrace{|\psi\rangle}^{=|S=0\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\vec{m},+\rangle \otimes |\vec{m},-\rangle - |\vec{m},-\rangle \otimes |\vec{m},+\rangle \right)$$

Vektor $\vec{m}$ ist beliebig, Singulettzustand in keine Richtung ausgezeichnet. Messung z.B. des ersten Spins liefert +1 oder −1, nach Messung eines $\gamma$ Kollaps beider Photonen in definiten Zustand: Verschränkung bzw. „Spukhafte Fernwirkung" (Einstein)

wähle $\vec{m}$ in Richtung einer Messachse, hier $\vec{m} = \vec{c}$.

$$\langle ac \rangle = \langle S=0 | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes (\vec{c} \cdot \vec{\sigma}) | \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\vec{c},+\rangle \otimes |\vec{c},-\rangle - |\vec{c},-\rangle \otimes |\vec{c},+\rangle \right)$$

$$= \langle S=0 | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \otimes \mathbb{1} | \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -|\vec{c},+\rangle \otimes |\vec{c},-\rangle - |\vec{c},-\rangle \otimes |\vec{c},+\rangle \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \langle \vec{c},+| \otimes \langle \vec{c},-| - \langle \vec{c},-| \otimes \langle \vec{c},+| \right) (\vec{a}\vec{\sigma}) \otimes \mathbb{1} \left( |\vec{c},+\rangle \otimes |\vec{c},-\rangle + |\vec{c},-\rangle \otimes |\vec{c},+\rangle \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \langle \vec{c},+| \vec{a}\vec{\sigma} | \vec{c},+\rangle \otimes \underbrace{\langle \vec{c},-|\vec{c},-\rangle}_{=1} - \langle \vec{c},-| \vec{a}\vec{\sigma} | \vec{c},-\rangle \otimes \underbrace{\langle \vec{c},+|\vec{c},+\rangle}_{=1} \right]$$

mit $\langle \vec{c},\pm | \vec{a}\vec{\sigma} | \vec{c},\pm \rangle = \pm \cos(\theta_{ac})$

vgl. polarisiertes Licht, das durch Polfilter durchgeht: $I = I_0 \cdot \cos^2(\theta)$

$$\Rightarrow \langle ac \rangle = -\frac{1}{2} \left[ \cos(\theta_{ac}) - (-\cos(\theta_{ac})) \right] = -\cos(\theta_{ac})$$

$$\Rightarrow |-\cos(\theta_{ac}) - \cos(\theta_{ad}) - \cos(\theta_{bc}) + \cos(\theta_{bd})| \leq 2$$

wähle $\theta_a = 90°$, $\theta_b = 0°$, $\theta_c = 45°$, $\theta_d = 135°$:

$$\Rightarrow \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right| = 2\sqrt{2} \not\leq 2$$

experimentell nachgewiesen!

korrekte Beschreibung der Natur kann nicht gleichzeitig lokal und realistisch sein!