Mathematische Ergänzung zur Theoretischen Physik II

Differentialgleichungen

Version Sommer 2000

JW Goethe Universität – Frankfurt

Hans Jürgen Lüdde

Institut für Theoretische Physik
der J.W. Goethe – Universität

Max von Laue Straße 1
60 438 Frankfurt am Main

e-mail: luedde@th.physik.uni-frankfurt.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Verständnis physikalischer Vorgänge wird von Größen bestimmt, die sich entsprechend physikalischer Grundgesetze zeitlich oder räumlich verändern. Diese, ein physikalisches System beschreibenden Größen können deterministischen Charakter haben – z.B. $\vec{r}(t)$, $\vec{p}(t) = m\dot{\vec{r}}(t)$ Phasenraumpunkt: vollständige Beschreibung eines Massenpunktes, der einer Kraft ausgesetzt ist – oder stochastischer Natur sein – $\rho(\vec{r}, t)$: Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Quantenteilchens zur Zeit t.
In jedem Fall folgt die Größe einem physikalischen Gesetz, das in der Regel als Differentialgleichung formuliert ist zu gegebenen Anfangs- bzw Randwerten, welche die Vorgaben eines konkreten physikalischen Systems beschreiben.
Beispiele für Naturgesetze formuliert als Differentialgleichungen sind:

- die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) ,$$

die alle Facetten der Punktmechanik enthält einschließlich nichtlinearer chaotischer Systeme,

- die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla\vec{D} &= 4\pi\rho && \text{Coulomb Gesetz} \\ \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{D} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} && \text{Ampere's Gesetz} \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} &= 0 && \text{Faraday's Gesetz} \\ \nabla\vec{B} &= 0 && \text{Axiom: keine magnetischen Monopole} \end{aligned}$$

die alle Eigenschaften elektromagnetischer Felder erklären, inklusive der klassischen Optik,

- die Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\hbar\partial_t|\psi\rangle &= \hat{H}|\psi\rangle \\ \hat{H} &= -\frac{1}{2}\triangle - \frac{1}{r} && \text{z.B. Wasserstoffatom} \end{aligned}$$

die den Bereich der niederenergetischen Quantenphysik (Atome, Moleküle, Cluster, Festkörper) umfasst.

1.1 Klassifikation von Differentialgleichungen

Mathematisch versteht man unter einer Differentialgleichung die Verknüpfung von Funktionen und deren Ableitungen. Um spezifischer zu werden, teilt man Differentialgleichungen in verschiedene Gruppen ein

1. die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$F(x; y(x), y'(x), ...y^{(n)}(x)) = 0$$

2. die partiellen Differentialgleichungen (z.B. zweiter Ordnung) der Form

$$A\partial_x^2 u + 2B\partial_{xy}^2 u + C\partial_y^2 u = F(xy; u(xy), u_x, u_y)$$

Partielle Differentialgleichungen unterscheidet man wiederum in drei Klassen, abhängig von den Kontrollparametern A, B, C:

- $B^2 - AC < 0$: elliptischer Typ

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 && \text{(Laplace Gleichung)} \\ \triangle u &= 4\pi\rho && \text{(Poisson Gleichung)} \\ \triangle u &= -k^2 u && \text{(Helmholtz Gleichung)} \end{aligned}$$

- $B^2 - AC = 0$: parabolischer Typ

$$\partial_t u = d\triangle u \quad \text{(Diffusionsgleichung)}$$

- $B^2 - AC > 0$: hyperbolischer Typ

$$\partial_t^2 u - c^2\triangle u = 0 \quad \text{(Wellengleichung)}$$

Beide Typen von Differentialgleichungen können verschiedener
Ordnung: höchster auftretender Differentialquotient
Grad: höchste auftretende Potenz der Funktion und ihrer Ableitungen
sein. Beispiele sind:

- gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung dritten Grades

$$4x^5y^2 + (2y(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})^2)\cos x - 5y + 7 = 0$$

- partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zweiten Grades

$${z_{xx}}^2 + {z_{yy}}^2 - x = 0$$

Allgemeine Lösungen einer Differentialgleichungen n. Ordnung erhält man durch die Bestimmung aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, welche die Differentialgleichung erfüllen. D.h. formal durch n-fache Integration. Bei jeder Integration erscheint eine unbestimmte Integrationskonstante, so dass allgemeine Lösungen immer eine Lösungsschar bilden.
Physikalisch realisierte Lösungen erhält man daraus durch Festlegung der Integrationskonstanten mit Hilfe vorgegebener Anfangswerte der Lösung (Anfangswertproblem), bzw Randwerte (Randwertproblem) oder Anfangsverteilungen (gemischtes Anfangs- Randwertproblem).

1.2 Allgemeine Lösungsmuster für Anfangswertprobleme

Die Lösung von Differentialgleichnungen erfolgt in der Regel nicht nach allgemeinen Rezepten. Für bestimmte Klassen gibt es Regeln, i.a. muss man jedoch jede Differentialgleichung speziell analysieren. Dieses Kapitel soll einige allgemeine Strategien vorstellen, die zumindest einen Lösungsweg aufzeigen bzw eine Näherungslösung ermöglichen.

1.2.1 Existenz- und Eindeutigkeitstheorem

Wenn eine Differentialgleichung vorliegt, deren Lösung nicht offensichtlich angegeben werden kann, ist es nützlich festzustellen, ob die Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt. D.h. man kann in jedem Fall untersuchen, ob die Lösung einer Differentialgleichung existiert und inwiefern diese Lösung eindeutig sein wird.
Da die folgenden Aussagen sehr allgemein sein werden, sind zunächst einige Vorbemerkungen notwendig.
Wir nehmen an, dass ein Anfangswertproblem in expliziter Form vorliegt, also

$$y' = f(y,t) \ ,$$

wobei t die unabhängige Variable benennt. Bisher haben wir f und y nur als skalare Größen behandelt. Wir können aber auch folgendes gekoppelte System von Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachten

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y},t) \ ,$$

mit der Interpretation

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1,\ldots,y_n,t) \\ y_2' &= f_2(y_1,\ldots,y_n,t) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(y_1,\ldots,y_n,t) \ . \end{aligned}$$

Insbesondere kann man jede Differentialgleichung n. Ordnung auf ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen. Z.B. erhält man für n=2:

$$\begin{aligned}
x'' &= g(x, x', t) \\
\text{Subst.:} \quad & x = y_1 \quad x' = y_2 \\
y_1' &= x' = y_2 \\
y_2' &= g(x, x', t) = g(y_1, y_2, t) \ ,
\end{aligned}$$

bzw allgemein

$$\begin{aligned}
x^{(n)} &= g(x, x', x'', \ldots, t) \\
\text{Subst.:} \quad & x^{(j)} = y_{j+1} \quad j = 0, \ldots, n-1 \\
\vec{y}\,' &= \vec{f}(\vec{y}, t) \\
f_j &= \begin{cases} y_{j+1} & j = 1, \ldots, n-1 \\ g(\vec{y}, t) & j = n \end{cases} \ .
\end{aligned}$$

D.h. die Form ist allgemein für eine beliebige explizit gegebene Differentialgleichung.

1. Das Existenztheorem von Peano:
   Das System von Differentialgleichungen

   $$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}, t) \ ,$$

   besitzt eine Lösung $\vec{y} = \vec{y}(t)$, falls $\vec{f}(\vec{y}, t)$ beschränkt und stetig ist.

2. Definition der Lipschitz Stetigkeit
   Sei $\vec{f}(\vec{y}, t)$ eine Vektorfunktion mit $f : \mathcal{R}^{n+1} \to \mathcal{R}^n$; $|t - t_0| \leq a, y \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$. $\vec{f}(\vec{y}, t)$ heißt Lipschitz stetig[1] bezüglich $\vec{y}$, falls für alle $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$ gilt

   $$|f_j(\vec{y}_1, t) - f_j(\vec{y}_2, t)| \leq L \sum_{k=1}^{n} |y_{1k} - y_{2k}|$$

   mit $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{D}$ und L einer beliebigen Konstante.

   Eine hinreichende Bedingung für die Lipschitz Stetigkeit ist die Differenzierbarkeit von $\vec{f}$, d.h. $\partial f_j / \partial y_k$ existiert und ist stetig in $\mathcal{D}$.

3. Das Eindeutigkeitstheorem
   Ist $\vec{f}(\vec{y}, t)$ Lipschitz stetig in $\vec{y} \in \mathcal{D}$ für $|t - t_0| \leq a$, so besitzt das Anfangswertproblem eine Lösung $\vec{y}(t)$, welche in $t_0 - a \leq t \leq t_0 + a$ eine eindeutige Funktion der Anfangsbedingung $\vec{y}_0 = \vec{y}(t_0 - a)$ ist.

D.h. zu jeder vorgegebenen Anfangsbedingung gibt es genau eine Lösung, falls die partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ existieren.

[1]Rudolf Lipschitz: $*$ 14.5.1832 in Königsberg † 7.10.1903 in Bonn. Mathematiker an den Universitäten Breslau und Bonn. Hauptwerke: Theorie der Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Theorie von Reihen, Zahlentheorie.

Bemerkungen:

- Sei $y' = f(y,t)$ eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Ist f nach y differenzierbar, so ist f auch Lipschitz stetig. f ist nach y differenzierbar, wenn $|\partial f/\partial y| \leq L$, ($L$ beliebige endliche Zahl). Falls aber der Differentialquotient von f beschränkt ist, ist in jedem Fall auch der Differenzenquotient von f beschränkt

$$\begin{aligned} |\frac{\triangle f}{\triangle y}| &= |\frac{f(y_1,t) - f(y_2,t)}{y_1 - y_2}| \leq L \\ |f(y_1,t) - f(y_2,t)| &\leq L|y_1 - y_2| \ . \end{aligned}$$

  Dies entspricht aber gerade der Lipschitz Stetigkeit von f. Die Forderung nach der Differenzierbarkeit von f ist offenbar stärker als die Lipschitz Bedingung (aber leichter zu überprüfen).

- Betrachte die Differentialgleichung $y' = 3y^{2/3}$ mit der Lösung $y(t) = (t - C)^3$. f ist für $y = 0$ nicht Lipschitz stetig

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3} \rightarrow \infty, \ y \rightarrow 0.$$

  Somit ist die Lösung für $t = C$ nicht eindeutig. Tatsächlich gibt es zu jedem C eine Punktlösung mit $y' = 0$ für alle t, welche die Lösung $y(t) = (t - C)^3$ schneidet.

1.2.2 Analytische Verfahren

1. Die Skalentransformation

   Die Lösung einer Differentialgleichung ist nicht nur eine Funktion der unabhängigen Variablen und der Anfangsbedingungen sondern auch abhängig von Parametern, die in der Differentialgleichung stehen (Kontrollvariablen). Das Ziel einer Skalentransformation ist die Anzahl der unabhängigen Kontrollvariablen zu minimieren.

   Beispiel.
   Die Streuung von einem vollständig ionisierten Atom (kein Elektron) der Ladung Q_1 an einem wasserstoffähnlichen Ion (ein Elektron) der Ladung Q_2 lässt sich mit Hilfe der Zweizentren - Schrödingergleichung beschreiben

$$\mathrm{i}\,\hbar\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\triangle\psi - \frac{Q_1}{r}\psi - \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{R}|}\psi \ .$$

   Mit Hilfe der Skalentransformationen

$$t = \alpha t' \ , \ \vec{r} = \beta\vec{r}\,' \ , \ \vec{R} = \beta\vec{R}' \ , \ \psi = \gamma\psi'$$

   erhält man

$$\mathrm{i}\,\hbar\frac{\gamma}{\alpha}\partial_{t'}\psi' = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta^2}\triangle\psi' - \frac{Q_1\gamma}{\beta}\frac{1}{r'}\psi' - \frac{Q_2\gamma}{\beta}\frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{R}'|}\psi' \ .$$

- Da die Schrödingergleichung linear ist, wird die Skalentransformation in ψ trivial. Wir setzen $\gamma = 1$
- Damit kein neuer Faktor vor dem Laplaceoperator steht, wähle $\alpha/\beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha/\beta = \beta$.
- Zur Elimination von Q_1 wähle $\beta Q_1 = 1 \Rightarrow \beta = 1/Q_1$.

Damit erhält man für die Schrödingergleichung in den skalierten Variablen

$$\mathrm{i}\,\hbar\partial_{t'}\psi = -\frac{1}{2}\triangle\psi - \frac{1}{r'}\psi - \frac{q}{|\vec{r}\,' - \vec{R}'|}\psi\ , \quad q = \frac{Q_2}{Q_1}\ .$$

D.h. um die Ladungsabhängigkeit des Streuvorganges zu untersuchen, benötigt man nicht beliebige Kombinationen von Q_1 und Q_2, sondern nur bestimmte Verhältnisse q.

2. Das Superpositionsprinzip
   Für lineare Differentialgleichungen gilt ganz allgemein das Superpositionsprinzip. D.h. sind u_1 und u_2 spezielle Lösungen der Differentialgleichung, so ist auch $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ eine Lösung. Man firndet somit immer die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung durch Superposition der Fundamentallösungen (n linear unabhängige Lösungen einer Differentialgleichung n. Ordnung). Die zunächst unbestimmten Koeffizienten werden durch die Randbedingungen oder Anfangswerte der konkreten Aufgabenstellung festgelegt.
   Zum Auffinden des Fundamentalsystems muss man einen Lösungsansatz angeben. Manchmal gelingt dies einfach (Bspl.: gewöhnliche lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $u(x) = \exp(\lambda x)$ (siehe Kap. (3.1))), manchmal benötigt man umfangreichere Ansätze (Potenzreihenansatz (Kap. (4.1)), Separationsansatz (Kap. (5))).

3. Die Transformation
   In einigen Fällen lassen sich Differentialgleichungen mit Hilfe von Transformationen (Substitutionen) auf bekannte Formen zurückführen (Kap. (2.4.1), Kap. (4.2)), d.h. man führt die Lösung über eine geschickte Substitution auf eine bekannte Lösung einer einfacheren Differentialgleichnung zurück.

4. Die Stabilitätstheorie
   Kommt man mit diesen allgemeinen Strategien nicht weiter, so bleibt in jedem Fall eine Stabilitätsuntersuchung kritischer Punktlösungen (Kap. (2.5)). Die Differentialgleichung wird in einer Umgebung um die Punktlösung $u' = 0$ linearisiert und das Verhalten der linearisierten Differentialgleichung untersucht.

In vielen Fällen ist man jedoch auf Näherungsverfahren, insbesondere numerische Lösungsmethoden angewiesen.

1.2.3 Näherungsmethoden

1. Methode der sukzessiven Approximation

Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung

$$y' = f(y,t) \ ,$$

wobei oBdA f und y skalare Funktionen sind. Dann kann man die Differentialgleichung formal integriern

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y,t')\,\mathrm{d}\,t'$$

und erhält eine Integralgleichung (Volterra Typ).[2] Man kann nun zeigen, dass folgendes Iterationsschema gegen die exakte Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung konvergiert, falls diese existiert und eindeutig ist, also f Lipschitz stetig ist

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_0,t')\,\mathrm{d}\,t' \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_1,t')\,\mathrm{d}\,t' \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_n,t')\,\mathrm{d}\,t' \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Folge der $y_n(t)$ konvergiert gegen die exakte Lösung $y(t)$ falls f die Lipschitzbedingung erfüllt.

Beweis:

Betrachte die Differenz aufeinanderfolgender Näherungen $(t > 0)$

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - y_n| &= |\int_0^t (f(y_n(t'),t') - f(y_{n-1}(t'),t'))\,\mathrm{d}\,t'| \\ &\leq \int_0^t |f(y_n) - f(y_{n-1})|\,\mathrm{d}\,t' \ . \end{aligned}$$

Wenn f eine Lipschitzbedingung erfüllt, gilt ferner

$$\leq L \int_0^t |y_n - y_{n-1}|\,\mathrm{d}\,t' \ .$$

Wir wollen nun explizit die Differenzen abschätzen

$$|y_1 - y_0| \quad \leq \quad L \int_0^t |y_0|\,\mathrm{d}\,t' = L|y_0|t \ ; \qquad (y_{-1} = 0)$$

[2] Vito Volterra: $*$ 3.5.1860 in Ancona, † 11.10.1940 Rom. Mathematiker in Rom. Hauptgebiete: Differential- und Integralrechnung, Integralgleichungen, Variationsrechnung und Potentialtheorie.

$$
\begin{aligned}
|y_2 - y_1| &\leq L \int_0^t |y_1 - y_0| \, \mathrm{d}\, t' \leq L^2 |y_0| \int_0^t t' \, \mathrm{d}\, t' = |y_0| \frac{L^2}{2!} t^2 \\
|y_3 - y_2| &\leq L \int_0^t |y_2 - y_1| \, \mathrm{d}\, t' \leq \frac{L^3}{2!} |y_0| \int_0^t t'^2 \, \mathrm{d}\, t' = |y_0| \frac{L^3}{3!} t^3 \\
&\vdots \\
|y_{n+1} - y_n| &\leq |y_0| \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Im nächsten Schritt betrachten wir die Reihe

$$|R(t)| = |y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots (y_{n+1} - y_n) + \ldots|$$

und fragen, ob diese Reihe absolut konvergiert. Falls der Grenzwert für $n \to \infty$ existiert, ist $R(t) = y(t)$ die gesuchte Lösung, da f Lipschitz stetig und somit die Lösung eindeutig ist.

$$
\begin{aligned}
|R(t)| &\leq |y_0| + \sum_{n=0} |y_{n+1} - y_n| \\
&\leq |y_0| (1 + \sum_{n=0} \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}) \\
&= |y_0| \exp(Lt) \; .
\end{aligned}
$$

Wir haben somit folgende Aussage bewiesen:
Die Reihe $R(t)$ konvergiert absolut (Majorantenkriterium). D.h. es existiert ein Grenzwert der Folge der Approximationen y_n mit $R(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t)$. Da f die Lipschitzbedingung erfüllt, existiert eine eindeutige Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung mit $y_0 = y(0)$ als Anfangsbedingung. Da $y(t)$ eindeutig ist, andererseits $R(t)$ eine Lösung der korrespondierenden Integralgleichung ist, muss $R(t) = y(t)$ sein.

Das Approximationsschema erlaubt immer ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung näherungsweise zu lösen. Es ist von großer Bedeutung in der Quantentheorie (Störungstheorie).

2. Numerische Methoden

Wenn man eine Differentialgleichung n. Ordnung lösen möchte, so ist es für die numerische Behandlung bequemer, diese Differentialgleichung in n gekoppelte Gleichungen 1. Ordnung umzuwandeln. Man hat damit den Vorteil, dass nur Ableitungen 1. Ordnung approximiert werden müssen. Diese Umformung ist immer möglich, wie wir in Kapitel (1.2.1) gesehen haben.

- Das Euler Verfahren

  Die einfachste Approximation einer Differentialgleichnung der Form

  $$\dot{y} = f(y, t)$$

besteht in der Ersetzung der Ableitung $\dot{y}$ durch den Differenzenquotient (dabei ist h die Schrittweite, in der man die unabhängige Variable (hier t) diskretisiert)

$$\dot{y} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + O[h] \ .$$

Dadurch erhält man eine Rekursionsformel für $y(t+h)$

$$y(t+h) = y(t) + hf(y(t), t) + O[h^2] \ ,$$

die bis auf Ordnungen h^2 der Schrittweite exakt ist. Ein entsprechend gekoppeltes System von Rekursionsformeln erhält man für Systeme von Differentialgleichungen

$$y_j(t+h) = y_j(t) + hf_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), t) + O[h^2] \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Dieses System von Rekursionsformeln nennt man das Euler Verfahren. Man bestimmt die Lösung sukzessive durch lineare Extrapolation. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist seine inhärente Instabilität, die im Verlauf der Zeitentwicklung zu einer Summation der Fehler führt.

- Verbessertes Euler Verfahren

Eine Verbesserung des Euler Verfahrens findet man, wenn man die Taylorreihe von $y(t+h)$ systematisch weiterführt. So erhält man z.B. bis zur 2. Ordnung

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + h\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}|_t + \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2}|_t + O[h^3] \\ &= y(t) + hf(y(t), t) + \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}|_t + O[h^3] \ . \end{aligned}$$

$\mathrm{d}\,f/\mathrm{d}\,t$ ersetzt man wieder durch die Vorwärtsdifferenz

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{f(y(t+h), t+h) - f(y(t), t)}{h} + O_1[h] \\ y(t+h) &= y(t) + hf(y(t), t) + O_2[h^2] \\ \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{f(y(t) + hf(y(t), t), t+h) - f(y(t), t)}{h} + O_3[h] \ . \end{aligned}$$

$\dot{f}$ ist also konsistent in der Fehlerordnung h approximiert worden. Berücksichtigt man, dass $\dot{f}$ mit $\frac{h^2}{2}$ gewichtet wird, hat man eine Rekursionsformel, die konsistent in der Ordnung h^3 ist

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hf + \frac{h}{2}(f(y+hf) - f(y)) + O[h^3] \\ &= y(t) + \frac{h}{2}(f(y+hf) + f(y)) + O[h^3] \ . \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man folgende Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} k^{(1)} &\equiv f(y(t), t) \\ k^{(2)} &\equiv f(y(t) + hk^{(1)}, t+h) \end{aligned}$$

und erhält endgültig

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}(k^{(1)} + k^{(2)}) + O[h^3] \ ,$$

bzw analog für ein System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_j(t+h) &= y_j(t) + \frac{h}{2}(k_j^{(1)} + k_j^{(2)}) + O[h^3] \ , j = 1, \dots, n \\ k_j^{(1)} &= f_j(y_1(t), \dots, y_n(t), t) \\ k_j^{(2)} &= f_j(y_1(t) + hk_1^{(1)}, \dots, y_n(t) + hk_n^{(1)}, t+h) \ . \end{aligned}$$

- Das Runge - Kutta[3] Verfahren

  Man kann auf die gleiche Weise eine systematische Verbesserung dieser sogenannten Einschrittverfahren erzielen. Das wohl bekannteste Beispiel dieser Familie ist das Runge - Kutta Verfahren. Da es verschiedene Varianten dieses Approximationsschemas gibt, soll es hier nur allgemein beschrieben werden. Zunächst formt man die Differentialgleichung

  $$\dot{y} = f(y, t)$$

  in eine Integralgleichung für das Intervall $[t, t+h]$ um (formale Integration beider Seiten)

  $$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(y(t'), t') \, \mathrm{d}\, t' \ .$$

  Man nähert das Integral durch eine Integralformel der Ordnung h^5, z.B. Simpson Regel[4]

  $$\int_t^{t+h} f(y(t'), t') \, \mathrm{d}\, t' = \frac{1}{6} h(f(y(t), t) + 4f(y(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2}) + f(y(t+h), t+h)) + O[h^5]$$

  und ersetzt die Funktionswerte an den Zwischenstellen durch ihre Taylorreihen

  $$\begin{aligned} y(t+\frac{h}{2}) &= y(t) + \frac{h}{2} f + \frac{h^2}{8} \dot{f} + \dots \\ y(t+h) &= y(t) + hf + \frac{h^2}{2} \dot{f} + \dots \ . \end{aligned}$$

  Im letzten Schritt werden die Ableitungen von f diskretisiert. Eine Spielart des Runge - Kutta Verfahrens ist dann durch die folgende Rekursionsformel

[3] Carl Runge: ∗ 30.8.1856 in Bremen, † 3.1.1927 in Göttingen. Mathematiker an der Technischen Hochschule Hannover und der Universität Göttingen. Arbeitsgebiete: Approximationstheorie unf Funktionentheorie. Wilhelm Kutta: ∗ 3.11.1867 Pitschen (Schlesien), † 25.12.1944 Fürstenfeldbruck. Mathematiker an den Universitäten Jena, Aachen und Stuttgart. Arbeitsgebiete: angewandte Mathematik und Geschichte der Mathematik.

[4] Thomas Simpson: ∗ 20.8.1710, † 14.5.1761 in Market Bosworth. Zunächst Weber und Lehrer wurde der Autodidakt Simpson 1743 Professor für Mathematik an der Militärschule von Woolwich.

definiert

$$\begin{aligned}
y_j(t+h) &= y_j(t) + h\left(\frac{k_j^{(1)}}{6} + \frac{k_j^{(2)}}{3} + \frac{k_j^{(3)}}{3} + \frac{k_j^{(4)}}{6}\right) + O[h^5] \\
k_j^{(1)} &= f_j(y_1(t), \ldots, y_n(t), t) \\
k_j^{(2)} &= f_j(y_1(t) + \frac{h}{2}k_1^{(1)}, \ldots, y_n(t) + \frac{h}{2}k_n^{(1)}, t + \frac{h}{2}) \\
k_j^{(3)} &= f_j(y_1(t) + \frac{h}{2}k_1^{(2)}, \ldots, y_n(t) + \frac{h}{2}k_n^{(2)}, t + \frac{h}{2}) \\
k_j^{(4)} &= f_j(y_1(t) + hk_1^{(3)}, \ldots, y_n(t) + hk_n^{(3)}, t + h) \; .
\end{aligned}$$

- Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweitensteuerung

Manche Anfangswertprobleme skalieren sehr unterschiedlich in der Zeit. Für bestimmte Zeitintervalle ist die Bewegung schnell, was eine feine Diskretisierung von t erfordert, zu anderen Zeiten ist die Bewegung langsam und eine feine Diskretisierung wäre eine Verschwendung von Rechenzeit. Deshalb ist eine automatische Steuerung der Schrittweite h abhängig vom momentanen Bewegungszustand sehr nützlich.

Dazu betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y, t)$$

im Zeitintervall $[t_i, t_f]$. $y(t_i)$ ist bekannt und man kann $y_h(t_f)$ bei gegebener Schrittweite h aus der Rekursionsformel für das Runge - Kutta Verfahren berechnen. Dabei ist die Abweichung vom wahren Wert $y(t_f)$

$$\epsilon_h = |y_h(t_f) - y(t_f)| \; .$$

Der Fehler ist von der Ordnung h^5, d.h. bei halber Schrittweite $(\frac{h}{2})^5$ könnten wir den Fehler auf $1/32$ des ursprünglichen Fehlers ϵ_h reduzieren. Andererseits benötigen wir aber doppelt so viele Schritte, um von t_i nach t_f zu kommen, somit gilt

$$\epsilon_h \approx 16\epsilon_{\frac{h}{2}} \; ,$$

mit

$$\epsilon_{\frac{h}{2}} = |y_{\frac{h}{2}}(t_f) - y(t_f)| \; .$$

Jetzt kann man den unbekannten wahren Wert $y(t_f)$ eliminieren, indem man schreibt (unter der Annahme, dass y_h <u>und</u> $y_{\frac{h}{2}}$ den wahren Wert entweder überschreiten oder unterschreiten)

$$\begin{aligned}
\epsilon_h &\approx 16\epsilon_{\frac{h}{2}} = \frac{16}{15}(\epsilon_h - \epsilon_{\frac{h}{2}}) \\
&\approx \frac{16}{15}|y_h(t_f) - y_{\frac{h}{2}}(t_f)| \; .
\end{aligned}$$

Wenn man eine Toleranzgrenze für den Fehler ϵ_{max} vorgibt, lässt sich die Schrittweite über den folgenden Algorithmus anpassen

(i) löse die Differentialgleichnung im vorgegebenen Intervall $[t_i, t_f]$ in einem Schritt $(h = t_f - t_i)$
(ii) löse die Differentialgleichung in $[t_i, t_f]$ mit halbierter Schrittweite $h/2$ und schätze ϵ_h ab
(iii) suche die maximal erlaubte Schrittweite entsprechend

$$|\frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_h}| = (\frac{h_{max}}{h})^5$$

(iv) falls $h_{max} < \frac{h}{2} \rightarrow$ setze $h = 2h_{max}$
falls $h_{max} \geq \frac{h}{2} \rightarrow y_{\frac{h}{2}}$ ist bereits das gesuchte Ergebnis
falls $h_{max} < h_{min} \rightarrow$ Fehlermeldung.
Dabei ist h_{min} eine vorgegebene minimale Schrittweite, die nicht unterschritten werden soll. Für jedes neue Zeitintervall beginnt man wieder bei (i), um mit der größten erlaubten Schrittweite weiter zu rechnen.

Zum Abschluss dieses Kapitels folgt ein MAPLE Arbeitsblatt zum Vergleich der besprochenen Methoden:

Numerische Lösung von Differentialgleichungen
Finite Differenzen Näherungen

Differentialgleichung:
```
> diff(y(x),x)=cos(x)*y(x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \cos(x) \cdot y(x)$$

Exakte Lösung:
```
> with(plots):with(plottools):
> f:=dsolve(diff(y(x),x)=cos(x)*y(x),y(0)=1,y(x));
```

$$f := y(x) = \exp(\sin(x))$$

```
> f1:=unapply(op(2,f),x):
> fig:=plot(f1(x),x=0..10,color=[black]):
> display(fig,view=[0..10,0..3], axes=boxed, title=‘ Exakte Lösung ‘);
```

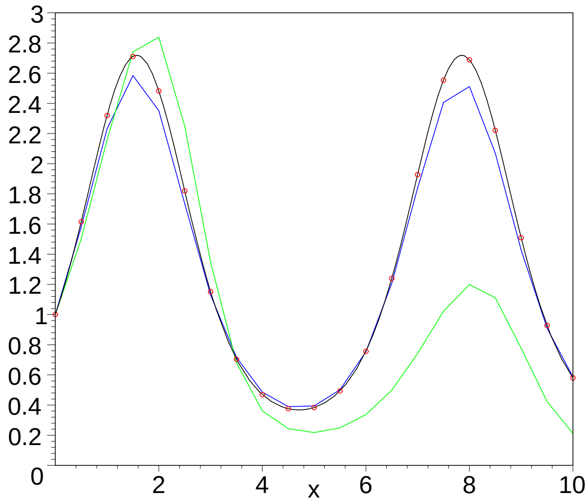
Maple Code: Euler Verfahren
```
> Digits:=10:
> x1[0]:=0:y1[0]:=1:h1:=0.5:n1:=20:
> for k from 0 to n1 do
> y1[k+1]:=y1[k]+h1*cos(x1[k])*y1[k]:
> x1[k+1]:=x1[k]+h1:
> ma11[k]:=[x1[k],y1[k]]: ♯ Maple Liste
> od:
> fig1:=plot([seq(ma11[j],j=0..n1)],color=green):
> display([fig,fig1],view=[0..10,0..3], axes=boxed, title=‘ Einfaches Euler Verfahren ‘);
```

Maple Code: Erweitertes Euler Verfahren

```
> x2[0]:=0:y2[0]:=1:h2:=0.5:n2:=20:
> for k from 0 to n2 do
> s1:=y2[k]*cos(x2[k]):
> s2:=(y2[k]+h2*s1)*cos(x2[k]+h2):
> y2[k+1]:=y2[k]+h2/2*(s1+s2):
> x2[k+1]:=x2[k]+h2:
> ma12[k]:=[x2[k],y2[k]]; ♯ Maple Liste
> od:
> fig2:=plot([seq(ma12[j],j=0..n2)],color=blue):
> display([fig,fig1,fig2],view=[0..10,0..3], axes=boxed, title=‘ Erweitertes versus einfachem Euler Verfahren ‘);
```

Maple Code: Runge-Kutta Verfahren

```
> x3[0]:=0:y3[0]:=1:h3:=0.5:n3:=20:
> for k from 0 to n3 do
> t1:=y3[k]*cos(x3[k]):
> t2:=(y3[k]+h3/2*t1)*cos(x3[k]+h3/2):
> t3:=(y3[k]+h3/2*t2)*cos(x3[k]+h3/2):
> t4:=(y3[k]+h3*t3)*cos(x3[k]+h3):
> y3[k+1]:=y3[k]+h3*(t1+2*t2+2*t3+t4)/6:
> x3[k+1]:=x3[k]+h3:
> ma13[k]:=[x3[k],y3[k]]; ♯ Maple Liste
> od:
> fig3:=plot([seq(ma13[j],j=0..n3)],style=point,symbol=circle,color=red):
> display([fig,fig1,fig2,fig3],view=[0..10,0..3], axes=boxed, title=‘ Euler vs Runge-Kutta Verfahren ‘);
```



Vergleich des einfachen (grün), des erweiterteten (blau) Eulerverfahrens mit dem Runge-Kutta Verfahren (rot) bei vergleichbaren Schrittweiten; exakte Lösung (schwarz).

Kapitel 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

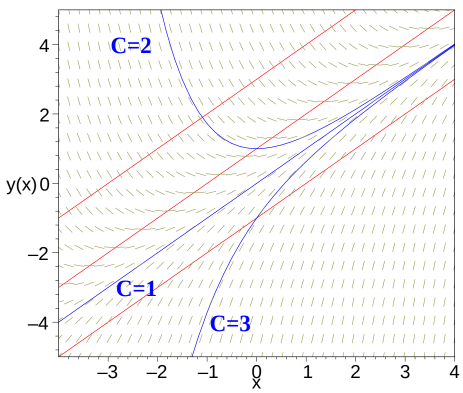
In diesem Kapitel werden einige systematische Strategien zur analytischen Diskussion von Differentialgleichungen 1. Ordnung besprochen. Der Schwerpunkt liegt bei Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen (2.3). Nichtlineare Differentialgleichungen lassen sich in bestimmten Fällen analytisch lösen, wenn sie sich durch Transformationen auf lineare Differentialgleichungen zurückführen lassen (2.4.1), exakte Differentialgleichungen sind (2.4.2) oder auf exakte Differentialgleichungen zurückgeführt werden können (2.4.3). Sonst bleibt in jedem Fall eine topologische Untersuchung von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen in einer Umgebung um sogenannte kritische Punktlösungen (2.5). Diese Diskussion erlaubt die Stabilität von Phasenraumbereichen zu bestimmen, um somit zumindest ein qualitatives Bild der Lösungsschar zu erhalten.

2.1 Richtungsfelder

Gegeben sei eine Differentialgleichung in expliziter Form

$$y'(x) = f(x, y) \; .$$

Diese Gleichung kann man direkt interpretieren: $y'(x)$ gibt offenbar in jedem von einer speziellen Lösung realisierten Punktepaar (x, y) die Steigung der Funktion $y(x)$ an, also die Steigung der Tangente im Punkt (x, y). Ordnet man so jedem Gitterpunkt (x_0, y_0) die Steigung $f(x_0, y_0)$ zu, so erhält man ein Richtungsfeld der Lösungsschar. Spezielle Lösungen sind dann diejenigen Kurven $y(x)$, die durch das Richtungsfeld gelegt werden können. Technisch ist die Interpretation eines Richtungsfeldes nicht einfach. Deshalb zeichnet man Kurven durch diejenigen Punkte (x, y), welche die gleich Steigung $f(x, y)$ besitzen: man bezeichnet diese Kurven als Isoklinen.



Richtungsfeld, Isoklinen und Lösungen der Differentialgleichung $y' = 1 + x - y$.

Beispiel: $y' = 1 + x - y$.

Gesucht sind die Punkte gleicher Steigung, d.h. $y' = a$. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich somit die Isoklinenschar

$$y(x) = 1 + x - a \;..$$

Die Lösungsschar lautet

$$y(x) = x - C\,\mathrm{e}^{-x} \;.$$

In der nebenstehenden Abbildung sind spezielle Lösungen mit $C = 1, 2, 3$ dargestellt.

2.2 Trennung der Variablen

Viele Differentialgleichnungen 1. Ordnung lassen sich mit der Methode der Trennung der Variablen durch direkte Integration lösen. Voraussetzungen sind, dass sich die Differentialgleichung

$$F(x; y(x), y'(x)) = 0$$

explizit schreiben lässt, d.h.

$$y' = f(x, y(x)) = \frac{g(x)}{h(y)} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$$

und in der unabhängigen x und abhängigen Variablen y separiert. Dann gilt

$$h(y)\,\mathrm{d}\,y = g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

und man erhält durch unbestimmte Integration beider Seiten

$$\begin{aligned} \int h(y')\;\mathrm{d}\,y' &= \int g(x')\;\mathrm{d}\,x' \\ H(y) &= G(x) + C\;. \end{aligned}$$

Dabei sind $H(y), G(x)$ Stammfunktionen von h, g und C die gemeinsame Integrationskonstante der linken und rechten Seite. Kann man die linke Seite nach y auflösen, so hat man eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Eine physikalisch realisierte Lösung erhält man aus der mathematischen Lösungsschar durch Festlegung der Integrationskonstanten mit Hilfe eines Anfangs - bzw Randwertes, also

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ C &= H(y_0) - G(x_0)\;. \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Malthus Wachstum mit zeitabhängiger Wachstumsfunktion $k(t)$. Die Wachstumsfunktion beschreibt für eine Population x die zeitlich veränderlichen Lebensbedingungen in einem Biotop.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k(t)x \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{(Anfangsbedingung)} \\ \frac{\mathrm{d}\,x}{x} &= k(t)\,\mathrm{d}\,t \\ \ln x &= K(t) + C \quad \frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t} = k(t)\ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die mathematische Lösungsschar

$$x(t) = \mathrm{e}^C\,\mathrm{e}^{K(t)}\ .$$

Für die realisierte Lösung mit der Anfangspopulation $x(t_0) = x_0$ gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathrm{e}^C\,\mathrm{e}^{K(t_0)} \quad C = \ln x_0 - K(t_0) \\ x(t) &= \mathrm{e}^{\ln x_0}\,\mathrm{e}^{K(t)-K(t_0)} = x_0\,\mathrm{e}^{K(t)-K(t_0)}\ . \end{aligned}$$

2. Für die Differentialgleichung $y' = 1+x-y$ ist zunächst keine Trennung der Variablen möglich. Aber nach der Substitution $z(x) = x - y(x)$ erhält man die Lösungsschar

$$\begin{aligned} 1 - z' &= 1 + z \quad z' = -z \quad \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = -\,\mathrm{d}\,x \\ \ln z &= -x + C \quad z(x) = C'\,\mathrm{e}^{-x}\ ,\ C' = \mathrm{e}^{-C} \\ z(x) &= x - y(x) = C'\,\mathrm{e}^{-x} \\ y(x) &= x - C'\,\mathrm{e}^{-x}\ . \end{aligned}$$

Diese Methode ist unter den genannten Voraussetzungen sowohl für lineare als auch nichtlineare Differentialgleichungen einsetzbar.

2.3 Lineare Differentialgleichungen

Eine lineare Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) = f(x)y + g(x)\ .$$

Ist $g(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen.
Man erhält die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung als Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (Superpositionsprinzip).

1. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man wieder nach der oben besprochenen Methode der Trennung der Variablen ($F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$)

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)y \\ y_h(x) &= C_1 \, \mathrm{e}^{F(x)} \; . \end{aligned}$$

2. Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:
Gesucht ist eine <u>spezielle</u> Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x)y + g(x) \; .$$

Nach dem Verfahren Variation der Konstanten macht man den Ansatz

$$y_i(x) = C(x) \, \mathrm{e}^{F(x)}$$

mit dem Ziel, eine einfach lösbare Differentialgleichung für $C(x)$ zu erhalten. (Idee: für $g(x) = 0$ ist $C(x) = C_1$; ist $g(x)$ klein, wird die Integrationskonstante gestört aber die Grundstruktur $\exp(F(x))$ der Lösung bleibt erhalten).
Einsetzen des Ansatzes für y_i in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x) \, \mathrm{e}^{F(x)} + C(x) f(x) \, \mathrm{e}^{F(x)} \\ &= f(x) C(x) \, \mathrm{e}^{F(x)} + g(x) \\ C'(x) &= g(x) \, \mathrm{e}^{-F(x)} \; . \end{aligned}$$

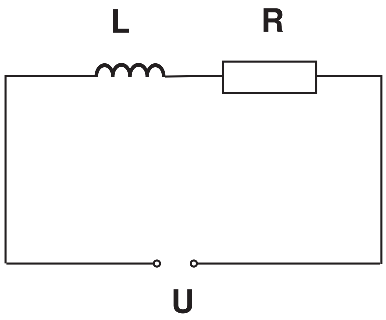
Da die zu bestimmende Funktion $C(x)$ nur als Ableitung vorkommt, kann man direkt integrieren

$$\begin{aligned} C(x) &= C_2 + \int g(x') \, \mathrm{e}^{-F(x')} \, \mathrm{d}\, x' \\ y_i(x) &= \mathrm{e}^{F(x)} (C_2 + \int g(x') \, \mathrm{e}^{-F(x')} \, \mathrm{d}\, x') \; . \end{aligned}$$

3. Allgemeine Lösung:
Nach dem Superpositionsprinzip erhält man die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1 \, \mathrm{e}^{F(x)} + \mathrm{e}^{F(x)} (C_2 + \int g(x') \, \mathrm{e}^{-F(x')} \, \mathrm{d}\, x') \\ &= \mathrm{e}^{F(x)} (C_3 + \int g(x') \, \mathrm{e}^{-F(x')} \, \mathrm{d}\, x') \; . \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung für einen LR-Schwingkreis:
Man bestimme die zeitliche Änderung des Stromes in einem Schwingkreis, aufgebaut aus einer Spule der Induktivität L und einem Widerstand R, getrieben durch die äußere Spannung U. Je nachdem ob der Schwingkreis durch eine konstante Spannung U_0 oder eine Wechselspannung $U(t)$ betrieben wird, erhält man die Lösungen zusammengefaßt in der folgenden Tabelle:



$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI &= U \\ I(0) &= I_0 \end{aligned}$$

Der LR Schwingkreis		
Spannung U	$U = U_0 = const$	$U = U_0 \sin\omega t$
Partikulärl.	$\begin{aligned} C(t) &= \frac{U_0}{\omega_0}\,\mathrm{e}^{\omega_0 t} + C_2 \\ I_i(t) &= \frac{U_0}{\omega_0} + C_2\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \end{aligned}$	$C(t) = \frac{U_0}{L}\int \sin\omega t'\,\mathrm{e}^{\omega_0 t'}\,dt' + C_2 = \frac{U_0}{L}\;\frac{\mathrm{e}^{\omega_0 t}}{\omega^2+\omega_0^2}(\omega_0\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + C_2$
Lösung	$\begin{aligned} I(0) &= I_0 \\ I(t) &= \frac{U_0}{R} + (I_0 - \frac{U_0}{R})\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \end{aligned}$	$I(0) = 0 \quad I(t) = \frac{1}{L(\omega^2+\omega_0^2)}\;\{\omega\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + \omega_0\sin\omega t - \omega\cos\omega t\}$

2.4 Nichtlineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden zwei Themenbereiche bearbeitet: (i) Differentialgleichungen, die sich mit Hilfe einer Transformation auf lineare Differentialgleichungen zurückführen lassen und (ii) Umformung auf sogenannte exakte Differentialgleichungen.

2.4.1 Transformationen bestimmter Klassen von Differentialgleichungen

Zu diesem Typ von Differentialgleichungen gehört die Bernoulli'sche Differentialgleichung[1]

$$y'(x) = f(x)y + g(x)y^n \ .$$

Zur Transformation setzt man folgende Substitution mit unbestimmtem Exponenten k

$$\begin{aligned} y^k(x) &= z(x) \quad y = z^{\frac{1}{k}} \\ y'(x) &= \frac{z'}{k} z^{\frac{1-k}{k}} \end{aligned}$$

[1] Johann Bernoulli: ∗ 27.7.1667 in Basel † 1.1.1748 in Basel. Promovierter Mediziner und Mathematiker an den Universitäten Groningen und Basel. Hauptwerke zur Differential- und Integralrechnung, Integration von Differentialgleichungen und zur Theoretischen Mechanik.

in die Differentialgleichung ein und erhält die neue Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{z'}{k} z^{\frac{1-k}{k}} &= f(x) z^{\frac{1}{k}} + g(x) z^{\frac{n}{k}} \\ z' &= k f(x) z + k g(x) z^{\frac{k-1+n}{k}} \ . \end{aligned}$$

Setzt man den bisher unbestimmten Koeffizienten $k = 1 - n$, so erhält man

$$z' = (1-n) f(x) z + (1-n) g(x)$$

eine lineare, inhomogene Differentialgleichung in der substituierten Funktion $z(x)$. Deren allgemeine Lösung lautet

$$z(x) = \exp\{(1-n)F(x)\}(C + \int (1-n) g(x') \, \mathrm{e}^{(n-1)F(x')} \, \mathrm{d}\, x')$$

und somit

$$y(x) = z^{\frac{1}{1-n}} = \mathrm{e}^{F(x)} (C + \int (1-n) g(x') \, \mathrm{e}^{(n-1)F(x')} \, \mathrm{d}\, x')^{\frac{1}{1-n}} \ .$$

Beispiel:
Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{x} y + x^2 y^2$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x} \quad g(x) = x^2 \quad n = 2 \\ F(x) &= -\ln|x| \ . \end{aligned}$$

Man erhält als Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= (\mathrm{e}^{-\ln|x|}(C - \int x'^2 \, \mathrm{e}^{-\ln|x'|} \, \mathrm{d}\, x'))^{-1} \\ &= \frac{1}{x}(C - \int x' \, \mathrm{d}\, x')^{-1} = \frac{1}{x}(C - \frac{1}{2}x^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{x(C - \frac{1}{2}x^2)} \ . \end{aligned}$$

Die folgende Riccati'sche Differentialgleichung[2]

$$y'(x) = f(x) y + g(x) y^2 + h(x)$$

läßt sich auf die Bernoulli' sche Differentialgleichung zurückführen, wenn man eine spezielle Lösung $y(x) = u(x)$ erraten kann. Dann ist ein Ansatz für die allgemeine Lösung

$$y(x) = u(x) + v(x) \ .$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} u' + v' &= fu + fv + gu^2 + 2guv + gv^2 + h \\ v' &= fv + 2guv + gv^2 \\ &= v(f + 2gu) + gv^2 \equiv hv + gv^2 \end{aligned}$$

eine Bernoulli'sche Differentialgleichung in v.

[2]Jacopo Francesco Riccati: ∗ 28.5.1676 in Venedig † 15.4.1754 in Treviso. Privatgelehrter in Padua und Treviso.

2.4.2 Exakte (totale) Differentialgleichungen

Man kann eine Differentialgleichung $y' = h(x, y)$ alternativ schreiben

$$f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \quad h = -\frac{f}{g}\ .$$

Erfüllen die Funktionen $f(x, y), g(x, y)$ die Bedingungen

$$f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \quad g(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,$$

so läßt sich die Differentialgleichung in Form eines totalen Differentials der Funktion $z(x, y)$ schreiben

$$0 = f\,\mathrm{d}\,x + g\,\mathrm{d}\,y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,z$$

und sofort integrieren

$$\mathrm{d}\,z = 0 \Rightarrow z(x, y) = C\ .$$

$z(x, y) = C$ ist dann eine implizite Lösung der Differentialgleichung. I.a. läßt sich diese Gleichung nach $y = y(x)$ auflösen. Erfüllen f und g die oben genannten Bedingungen, nennt man eine Differentialgleichung exakt bzw vollständig oder total. Eine notwendige Bedingung, die f und g erfüllen müssen erhält man aus der Tatsache

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\
\rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial y} \\
\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x}\ .
\end{aligned}$$

In der Regel muss man eine Differentialgleichung zunächst umformen, um eine exakte Differentialgleichung daraus zu erhalten.

2.4.3 Der integrierende Faktor

Unter einem integrierenden Faktor versteht man eine Funktion $\mu(x, y)$, die aus einer Differentialgleichung eine exakte Differentialgleichung formt

$$\mu(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \mu(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0\ .$$

Die oben formulierte notwendige Bedingung für f und g gibt die Möglichkeit $\mu(x, y)$ zu bestimmen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\mu f) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu g) \\
\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} g - \frac{\partial \mu}{\partial y} f + \mu(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Man erhält also eine Differentialgleichung für den integrierenden Faktor $\mu(x, y)$. In der Regel ist diese Differentialgleichung komplizierter als die ursprüngliche. Man benötigt aber nur eine <u>spezielle</u> Lösung für μ, die sich in einigen Fällen erraten läßt.

Beispiel:
Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{array}{lcl} y' = -\dfrac{xy^3}{1+2x^2y^2} & \rightarrow & xy^3 \,\mathrm{d}\, x + (1+2x^2y^2)\,\mathrm{d}\, y = 0 \\ \rightarrow f(x,y) = xy^3 & & g(x,y) 1 + 2x^2y^2 \;. \end{array}$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung für den integrierenden Faktor

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} xy^3 + 3\mu xy^2 = \frac{\partial \mu}{\partial x}(1+2x^2y^2) + 4\mu xy^2 \;.$$

Um eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung zu finden, versuchen wir den Ansatz $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial y} xy^3 &= \mu xy^2 \\ y \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \quad \rightarrow \quad \mu = cy \;. \end{aligned}$$

Als spezielle Lösung erhalten wir $\mu = y$. Multiplikation der Ausgangsgleichung mit y ergibt

$$\begin{aligned} xy^4 \,\mathrm{d}\, x + (y + 2x^2y^3)\,\mathrm{d}\, y &= 0 \\ f = xy^4 = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \rightarrow \quad z(x,y) &= \frac{1}{2}x^2y^4 + C_1(y) \\ g = y + 2x^2y^3 = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \rightarrow \quad z(x,y) &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2y^4 + C_2(x) \;. \end{aligned}$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke für $z(x, y)$ ergibt $C_1(y) = \frac{1}{2}y^2$ und $C_2(x) = C$ =const, somit

$$z(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^2 = C \;.$$

Nicht immer ist es so einfach, eine spezielle Lösung der partiellen Differentialgleichung für den integrierenden Faktor zu finden. Deshalb sollen (ohne Beweis) einige Kriterien angegeben werden, die das Auffinden eines integrierenden Faktors erleichtern.

1. Ist $\frac{1}{g(x,y)}(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}) = h(x)$ eine Funktion von x <u>alleine</u>, so ist $\mu(xy) = \exp(H(x))$ mit $H(x) = \int h(x')\,\mathrm{d}\, x'$ ein integrierender Faktor.

   Beispiel:
   Löse die Differentialgleichung $(x^2+y^2+x)\,\mathrm{d}\, x + xy \,\mathrm{d}\, y = 0 \equiv f(x,y)\,\mathrm{d}\, x + g(x,y)\,\mathrm{d}\, y$.

Diese Gleichung ist wegen $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial g}{\partial x} = y$ nicht exakt. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}) &= \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} \equiv h(x) \\ \exp(\int h(x')\,\mathrm{d}\,x') &= \exp(\ln x) = x \end{aligned}$$

x ist somit der gesuchte integrierende Faktor. Man erhält nach Einsetzen

$$\begin{aligned} (x^3 + xy^2 + x^2)\,\mathrm{d}\,x + x^2y\,\mathrm{d}\,y &= 0 \\ x^3\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,x + (xy^2\,\mathrm{d}\,x + x^2y\,\mathrm{d}\,y) &= 0 \\ \text{setze} \quad xy^2\,\mathrm{d}\,x + x^2y\,\mathrm{d}\,y &= \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2) \\ \to 3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 &= C\ . \end{aligned}$$

2. Ist entsprechend $\frac{1}{f(x,y)}(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}) = -h(y)$ eine Funktion von y alleine, so ist $\mu(xy) = \exp(H(y))$ mit $H(y) = \int h(y')\,\mathrm{d}\,y'$ ein integrierender Faktor.

3. Sind $f(x,y)$ und $g(x,y)$ homogen von gleichem Grade, d.h. gilt mit

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \quad g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m g(x,y)$$

$n = m$, so ist

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xf + yg}$$

ein integrierender Faktor.

Beispiel:
Löse die Differentialgleichung $y^2\,\mathrm{d}\,x + (x^2 - xy - y^2)\,\mathrm{d}\,y = 0$. Die Gleichung ist homogen und

$$\frac{1}{fx + gy} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

ist ein integrierender Faktor, mit dem sich die Differentialgleichung in die exakte Form umschreiben läßt

$$\frac{y}{x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x^2 - xy - y^2}{y(x^2 - y^2)}\,\mathrm{d}\,y = 0\ .$$

Zur Lösung definiere

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \frac{y}{x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y})\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y} + \phi(y)\ . \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= -\frac{x}{x^2-y^2}+\phi'(y)\\ &= \frac{x^2-xy-y^2}{y(x^2-y^2)}=\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2-y^2}\ .\end{aligned}$$

Daraus bestimmt sich die bisher unbekannte Funktion $\phi'(y)=\frac{1}{y}$ und damit $\phi(y)=\ln y$. Als allgemeine Lösung erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y}+\ln y &= \ln C_1\\ (x-y)y^2 &= C(x+y)\ .\end{aligned}$$

4. Läßt sich die Differentialgleichung in der Form

$$yf_1(xy)\,\mathrm{d}\,x+xg_1(xy)\,\mathrm{d}\,y=0$$

schreiben, so ist

$$\mu(x,y)=[xy(f_1-g_1)]^{-1}\quad f_1-g_1\neq 0$$

ein integrierender Faktor.
Beispiel:
Löse die Differentialgleichung $y(2xy+1)\,\mathrm{d}\,x+x(1+2xy-x^3y^3)\,\mathrm{d}\,y=0$. Die Gleichung besitzt als integrierenden Faktor $\frac{1}{x^4y^4}$ und transformiert sich in die exakte Form

$$(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3})\,\mathrm{d}\,x+(\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y})\,\mathrm{d}\,y=0\ .$$

Wie im vorigen Beispiel setze

$$F(x,y)=\int(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y^3})\ \mathrm{d}\,x=-\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{3x^3y^3}+\phi(y)$$

und erhalte daraus

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^4}+\phi'(y)=\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{1}{y}\ ,$$

mit $\phi'(y)=-1/y$ bzw $\phi(y)=-\ln y$. Für die allgemeine Lösung erhält man schließlich

$$\begin{aligned}-\ln y-\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{3x^3y^3} &= C_1\\ y &= C\exp\{-(3xy+1)/(3x^3y^3)\}\ .\end{aligned}$$

2.5 Topologische Analyse

Kann man eine Differentialgleichung nicht exakt lösen, so erlaubt eine topologische Analyse des Phasenraumes, Aussagen über Eigenschaften der Lösung zu gewinnen. Dieses Kapitel führt in die damit zusammenhängende Stabilitätstheorie ein.

2.5.1 Der Phasenraum

Wir haben schon zu Beginn der Vorlesung eine alternative Darstellung der Lösung einer Differentialgleichung erwähnt: die Phasenraumdarstellung. Dazu betrachten wir das Beispiel des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + kx = 0 \; .$$

Mit der Substitution $x = y_1, \; \dot{x} = y_2$ erhalten wir ein System aus zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

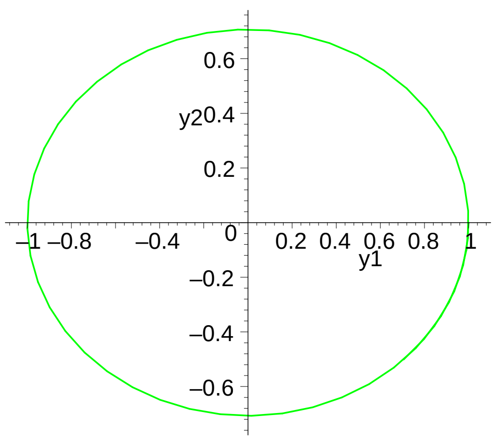
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -ky_1 \end{aligned}$$

y_1 und y_2 sind als abhängige Variablen beide eine Funktion von t. Man kann aber auch y_1 als unabhängige Variable auffassen und die Lösung $y_2(y_1)$ suchen. Dazu schreibt man die zweite Differentialgleichung wie folgt um

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,y_1}\frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,y_1} y_2 = -ky_1 \end{aligned}$$

und löst die verbleibende Differentialgleichung durch Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} y_2 \,\mathrm{d}\,y_2 &= -ky_1 \,\mathrm{d}\,y_1 \quad \Big| \int \\ y_2^2 + ky_1^2 &= C \; . \end{aligned}$$



Phasenraumorbitale des harmonischen Oszillators

Berücksichtigt man die ursprüngliche Substitution, so erhält man

$$\dot{x}^2 + kx^2 = C \; .$$

Die Darstellung $\dot{x} = g(x)$ nennt man die Phasenraumdarstellung. Sie ist immer möglich, wenn das System von Differentialgleichungen autonom ist, d.h. nicht explizit von der unabhängigen Variablen (hier t) abhängt. Der Begriff des Phasenraumes ist allgemeiner als in der Physik gebräuchlich. Mathematisch handelt es sich um die Darstellung der Lösung einer Differentialgleichung als Funktion einer der abhängigen Variablen.

Jeder Punkt im Phasenraum repräsentiert in diesem Fall die Geschwindigkeit (bzw den Impuls) und den Ort eines Teilchens zu einer bestimmten Zeit. Die Phasenraumkurve (Trajektorie bzw Orbital) wird im Zeitverlauf durchlaufen. Welche Phasenraumkurve der Kurvenschar $\dot{x}^2 + kx^2 = C$ durchlaufen wird, hängt von der Wahl der Anfangsbedingung und somit der Festlegung von C ab. Wird die Lipschitzbedingung für die Differentialgleichung der Phasenraumkurve erfüllt, so schneiden sich Trajektorien zu verschiedenen Anfangsbedingungen nicht.

Zum Abschluss betrachten wir die explizite Lösung des harmonischen Oszillators

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \omega^2 = k \; .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\omega\cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x}^2 + kx^2 &= A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi) + kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \\ &= A^2\omega^2 \equiv C \quad \Rightarrow \quad A^2 = \frac{C}{k} \; . \end{aligned}$$

C ist eine Funktion der Amplitude (Anfangsauslenkung) und ϕ positioniert den Anfangspunkt auf der Ellipse $\dot{x}^2 + kx^2 = C$. Für $k = 1$ erhält man als Phasenraumorbitale Kreise mit dem Radius $r^2 = C = A^2$.

Eine Verallgemeinerung der Betrachtung erhält man für Systeme von autonomen Differentialgleichungen

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad y_j = f_j(y_1, \ldots, y_n) \; .$$

Definiert man eine der Komponenten (z.B. y_1) als neue unabhängige Variable, so erhält man

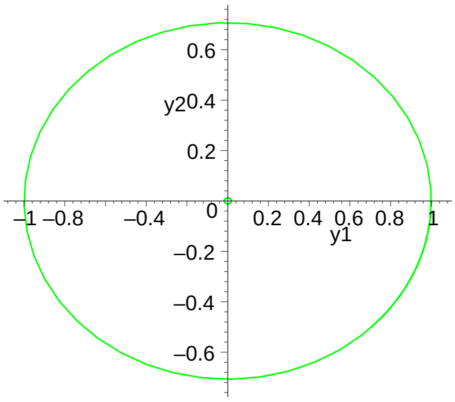
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, y_j}{\mathrm{d}\, t} &= \frac{\mathrm{d}\, y_j}{\mathrm{d}\, y_1}\dot{y}_1 = \frac{\mathrm{d}\, y_j}{\mathrm{d}\, y_1} f_1 = f_j \\ \frac{\mathrm{d}\, y_j}{\mathrm{d}\, y_1} &= \frac{f_j}{f_1} \quad j = 2, \ldots, n \; ; f_1 \neq 0 \end{aligned}$$

die Differentialgleichung für die Phasenraumlösung. Falls $f_1 = 0$ im Definitionsbereich, kann man als unabhängige Variable eine beliebige andere Komponente y_k definieren mit $f_k \neq 0$.

2.5.2 Kritische Punktlösungen

Das geschilderte Verfahren, eine Differentialgleichung für die Phasenraumtrajektorie zu erhalten versagt, wenn alle f_j in einem Punkt des Definitionsbereiches verschwinden. Diese Situation soll gesondert behandelt werden.

Definition:
Betrachte die Differentialgleichung $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$. Existiert eine Nullstelle $\vec{y}_0$ von $\vec{f}$, so gilt $\dot{\vec{y}} = 0$ und $\vec{y}_0$ ist eine Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.



Punktlösungen im Phasenraum

Beispiel:

Die Phasenraumtrajektorien des harmonischen Oszillators sind $\dot{x}^2 + kx^2 = C$. Für $C = 0$ ergibt sich die kritische Punktlösung $\dot{x} = 0$, $x = 0$, d.h. mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$ bleibt der Oszillator für alle Zeiten in seiner Gleichgewichtslage.

Solche Lösungen nennt man kritische Punktlösungen, da sie im Phasenraum nur als isolierter Punkt erscheinen.
Der Begriff kritisch wird klar, wenn wir die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators in Standardform bringen

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + kx &= 0 \\
\text{Substitution:} \quad & x = y_1 \quad \dot{x} = y_2 \\
\Rightarrow \dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= -ky_1 \\
\text{Punktlösung} \quad & \dot{x} = x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{0}{0} \; .
\end{aligned}
$$

D.h. die Differentialgleichung für den Phasenraum

$$\frac{\mathrm{d}\, y_2}{\mathrm{d}\, y_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

ist für die speziell gewählte Anfangsbedingung 'kritisch', der Grenzwert muss kontrolliert werden!
Da f in einer Umgebung um seine Nullstelle klein ist, kann man die Differentialgleichung in dieser Umgebung linearisieren. D.h. ist y_0 eine Punktlösung der Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ mit der Eigenschaft $f(y_0) = 0$, so gilt in einer Umgebung um diese Lösung

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=y_0}(y - y_0) + O[(y - y_0)^2] \\
&\approx \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=y_0}(y - y_0) \; .
\end{aligned}
$$

In der Regel substituiert man y so, dass die Nullstelle von f in $y_0 = 0$ liegt (hier $\bar{y} = y - y_0$)

$$\dot{\bar{y}} \approx \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}|_{\bar{y}=0}(\bar{y}) \; .$$

Die Verallgemeinerung eines linearisierten Systems von Differentialgleichungen in einer Umgebung um die kritische Punktlösung ist dann

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{y}} &\approx \boldsymbol{A}\vec{y} \\
\boldsymbol{A} &= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}\right|_{\vec{y}=0} .
\end{aligned}$$

$\dot{\vec{y}} = \boldsymbol{A}\vec{y}$ repräsentiert ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösungsstruktur diskutieren wir später. An dieser Stelle wollen wir die Eigenschaften der linearisierten Differentialgleichung für zweidimensionale Systeme explizit betrachten.

2.5.3 Elementare Stabilitätstheorie

Definition:
Eine kritische Punktlösung heißt ein positiver Attraktor, wenn jede Lösung der linearisierten Differentialgleichung $\dot{\vec{y}} = \boldsymbol{A}\vec{y}$ aus einer Umgebung diese Punktlösung als Grenzwert besitzt. In diesem Fall nennt man die Lösung stabil. Umgekehrt nennt man $\vec{y}_0$ einen negativen Attraktor, wenn sich jede Lösung aus der Umgebung von der Punktlösung entfernt.

Wir betrachten im Detail das System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\
\dot{y}_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2
\end{aligned}$$

und setzen den Lösungsansatz

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

in die Differentialgleichungen ein

$$\begin{aligned}
\lambda_1 y_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\
\lambda_2 y_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2
\end{aligned}$$

bzw in Matrixform

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Diese Form entspricht strukturell einem algebraischen Eigenwertproblem. Der Ansatz ist eine Lösung, wenn die Eigenwerte λ_1, λ_2 existieren.
Man erhält die Eigenwerte aus der notwendigen Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung heißt Säkulargleichung oder charakteristische Gleichung und ergibt sich ausgeschrieben als

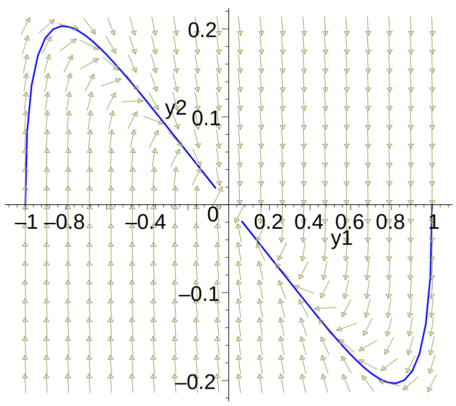
$$\begin{aligned}\lambda^2 &- (A_{11}+A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0\\ \lambda_{1/2} &= \frac{A_{11}+A_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(A_{11}-A_{22})^2}{4} + A_{12}A_{21}}\,.\end{aligned}$$

Die Lösung lautet dann

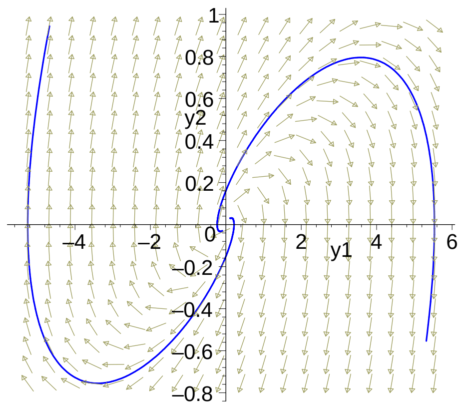
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\,.$$

λ_j kann dabei reell oder komplexwertig sein. Im Einzelnen unterscheidet man die folgenden Fälle:

1. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathcal{R}$ und $\lambda_1\lambda_2 > 0$: der kritische Punkt ist ein positiver (negativer) Attraktor und heißt Knoten, wenn λ_1 , λ_2 beide negativ (positiv) und reell sind. Die Trajektorien in einer Umgebung eines Knoten sind in diesem Falle Parabeläste.

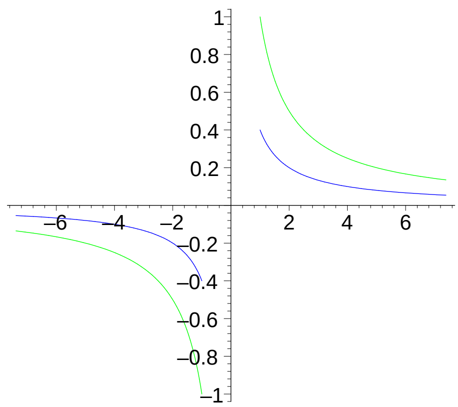


Knoten: positiver Attraktor für $\lambda_1 < 0\,,\ \lambda_2 < 0\ \in \mathcal{R}$



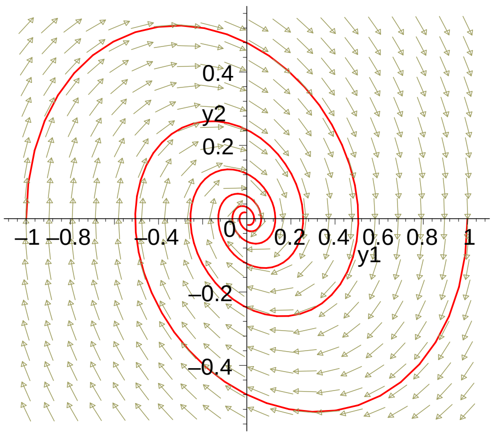
Knoten: negativer Attraktor für $\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 > 0\ \in \mathcal{R}$

2. λ_1 , $\lambda_2 \in \mathcal{R}$ und $\lambda_1\lambda_2 < 0$: der kritische Punkt ist ein Sattelpunkt, d.h. die Punktlösung ist weder stabil noch instabil. Phasenraumlösungen in der Nähe eines Sattelpunktes sind Hyperbeläste.

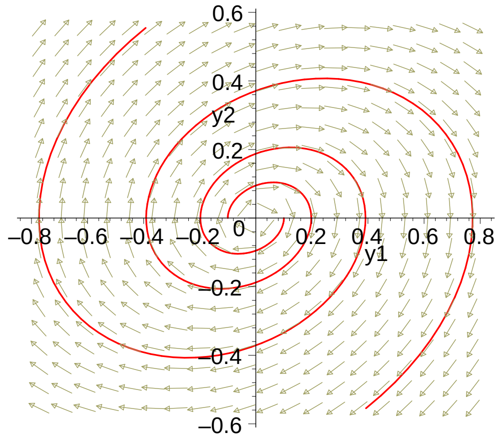


Sattel für z.B. $\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 < 0\ \in \mathcal{R}$

3. $\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$: der kritische Punkt ist ein positiver (negativer) Attraktor und heißt Fokus, wenn $\lambda_1 = \lambda_2^*$ und $\Re\lambda_1 < 0$ ($\Re\lambda_1 > 0$) ist. Die Trajektorien in einer Umgebung eines Fokus sind Spiralen mit der Punktlösung als Anfang (Ende).

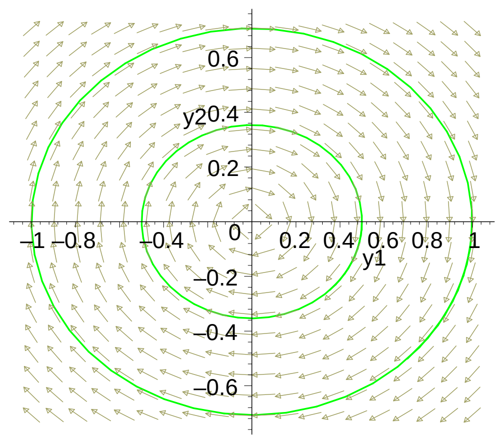


Fokus: positiver Attraktor für
$\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$, $\Re\lambda_1 < 0$



Fokus: negativer Attraktor für
$\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$, $\Re\lambda_1 > 0$

4. $\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$ und $\Re\lambda_1 = 0$: der kritische Punkt ist ein Zentrum, d.h. Lösungen in einer Umgebung um den kritischen Punkt oszillieren mit konstanter Amplitude. Kennt man die Eigenschaften von isolierten Punktlösungen, so hat man auch Informationen über Lösungen zu Anfangsbedingungen aus der Umgebung. Man erhält so Aussagen über Stabilitätszonen im Phasenraum:



Zentrum für $\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathcal{C}$, $\Re\lambda_1 = 0$

Theorem:
Betrachte die Differentialgleichung $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) = \boldsymbol{A}\vec{y} + \vec{g}(\vec{y})$. Falls $\vec{y} = 0$ eine Punktlösung der linearisierten Differentialgleichung ($\vec{g} = 0$) ist, so ist sie auch eine Punktlösung des nichtlinearen Systems mit <u>identischen</u> Stabilitätseigenschaften.

Beispiele:

1. Mathematisches Pendel mit Reibung

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + k\sin x = 0 \qquad k = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution } x = y_1 \qquad & \dot{x} = y_2 \\ \dot{y}_1 = y_2 \qquad & \dot{y}_2 = -k \sin y_1 - \mu y_2 \\ \Rightarrow \vec{f} \quad = \quad & \begin{pmatrix} y_2 \\ -k \sin y_1 - \mu y_2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Punktlösung erhält man aus der Bedingung $\vec{f}(\vec{y}_0) = 0$ zu $\vec{y}_0 = (00)^T$. Im nächsten Schritt linearisieren wir die Differentialgleichung für das mathematische Pendel und erhalten den harmonischen Oszillator:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1}|_{y_1=0}\, y_1 - \frac{\partial f_2}{\partial y_2}|_{y_2=0}\, y_2 = -k y_1 - \mu y_2 . \end{aligned}$$

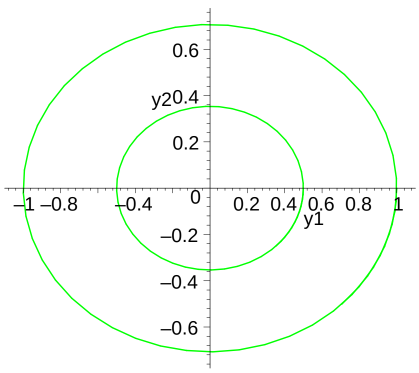
In Matrixform erhält man

$$\dot{\vec{y}} = \boldsymbol{A}\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

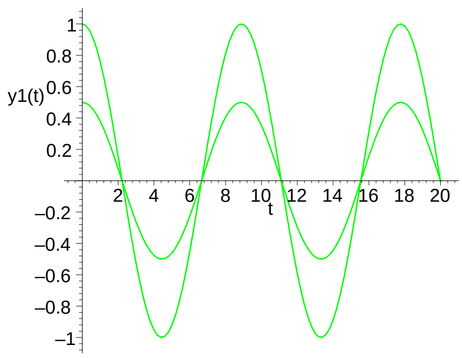
Aus der Existenz einer nichttrivialen Lösung zur Bestimmung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ erhält man die Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= 0 \quad \boldsymbol{I} \text{ Einheitsmatrix} \\ \lambda_{1/2} &= -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - k} . \end{aligned}$$

(i) $\mu = 0$: keine Reibung $\rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{|k|}$. Lösungen oszillieren ungedämpft. Phasenraumtrajektorien sind Ellipsen, die kritische Punktlösung ist ein Zentrum, da $\lambda_1 = \lambda_2^*$.

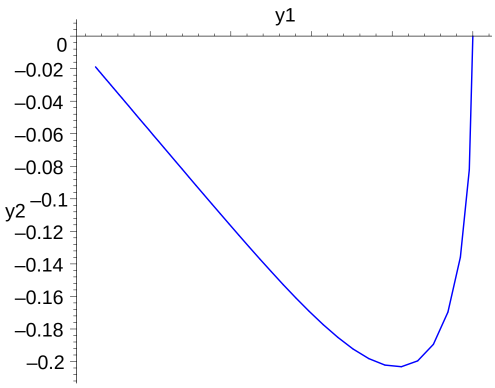


Phasenraumtrajektorien des ungedämpften mathematischen Pendels in einer Umgebung um die kritische Punktlösung $\dot{x} = x = 0$ (Zentrum)

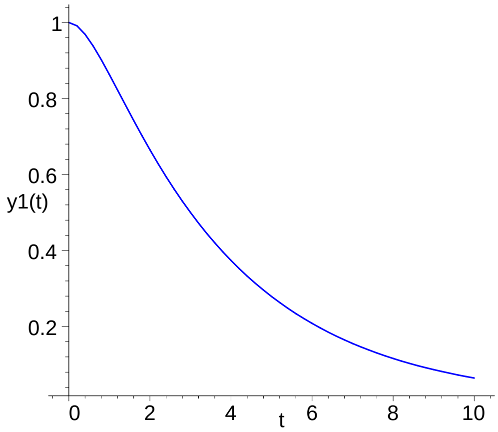


Die Lösung für den harmonischen Oszillator ist ähnlich der des mathematischen Pendels bei kleinen Amplituden x

(ii) $\mu^2/4 - k \geq 0$: aperiodischer Grenzfall $\to \lambda_{1/2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - k}$. Lösungen oszillieren nicht. Phasenraumtrajektorien sind Parabeläste, die kritische Punktlösung ist ein Knoten (positiver Attraktor), da λ_1 , $\lambda_2 < 0$.

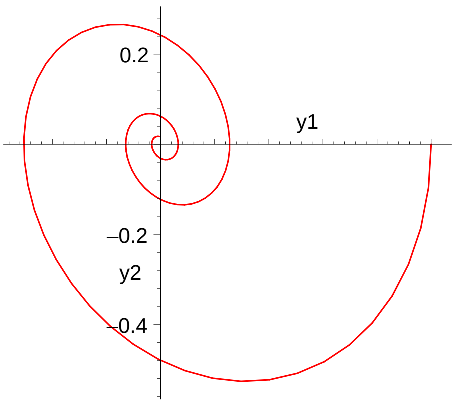


Phasenraumtrajektorien des aperiodisch gedämpften mathematischen Pendels in einer Umgebung um die kritische Punktlösung $\dot{x} = x = 0$ (Knoten)

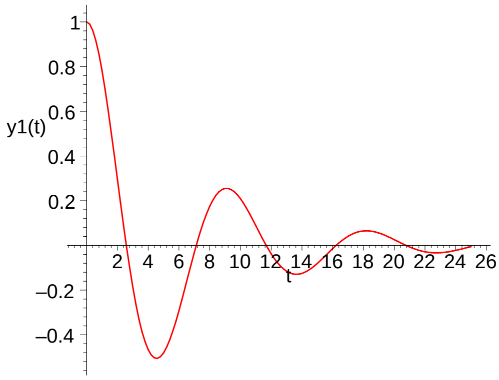


Amplitudenfunktion des aperiodisch gedämpften mathematischen Pendels für kleine Amplituden x

(iii) $\mu^2/4 - k < 0$: gedämpfter Oszillator $\to \lambda_{1/2} = -\frac{\mu}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{|\frac{\mu^2}{4} - k|}$. Phasenraumtrajektorien sind Spiralen, die kritische Punktlösung ist ein Fokus (positiver Attraktor), da $\Re\lambda_{1/2} < 0$.



Phasenraumtrajektorien des gedämpften mathematischen Pendels in einer Umgebung um die kritische Punktlösung $\dot{x} = x = 0$ (Fokus)



Amplitudenfunktion des gedämpften mathematischen Pendels für kleine Amplituden x

2. Volterra Lotka Räuber-Beute System
   Gesucht sind die Bedingungen, unter denen ein System aus zwei Populationen in

einem Biotop stabil koexistieren können. Die Population x ernährt sich von den Resourcen des Biotops (z.B. Pflanzenfresser), ist aber gleichzeitig die Beute der fleischfressenden Population y. a ist die Nettogeburtenrate der Beute, c die natürliche Sterberate des Räubers und b die Kopplungsstärke zwischen beiden Populationen (z.B. ist das Biotop klein, so wird b groß sein, denn Räuber und Beute treffen häufig aufeinander). Eine einfache mathematische Beschreibung gibt folgendes System von Differentialgleichungen $(a, b, c > 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= bxy - cy \,. \end{aligned}$$

Unter welcher Bedingung findet man ein dynamisches Gleichgewicht für die Koexistenz von Räuber und Beute?
Kritische Punktlösungen:

$$\begin{array}{rl} ax - bxy = 0 & \qquad bxy - cy = 0 \\ x = y = 0 & \qquad x = \dfrac{c}{b} \;,\; y = \dfrac{a}{b} \;. \end{array}$$

Linearisierung in einer Umgebung um beide Punktlösungen

$$\begin{array}{rrcl} (0,0) & \dot{x} &=& ax \\ & \dot{y} &=& -cy \\ (\frac{c}{b}, \frac{a}{b}) & \dot{x} &=& -c(y - \frac{a}{b}) \\ & \dot{y} &=& a(x - \frac{c}{b}) \;. \end{array}$$

Lösung in einer Umgebung um (0,0):

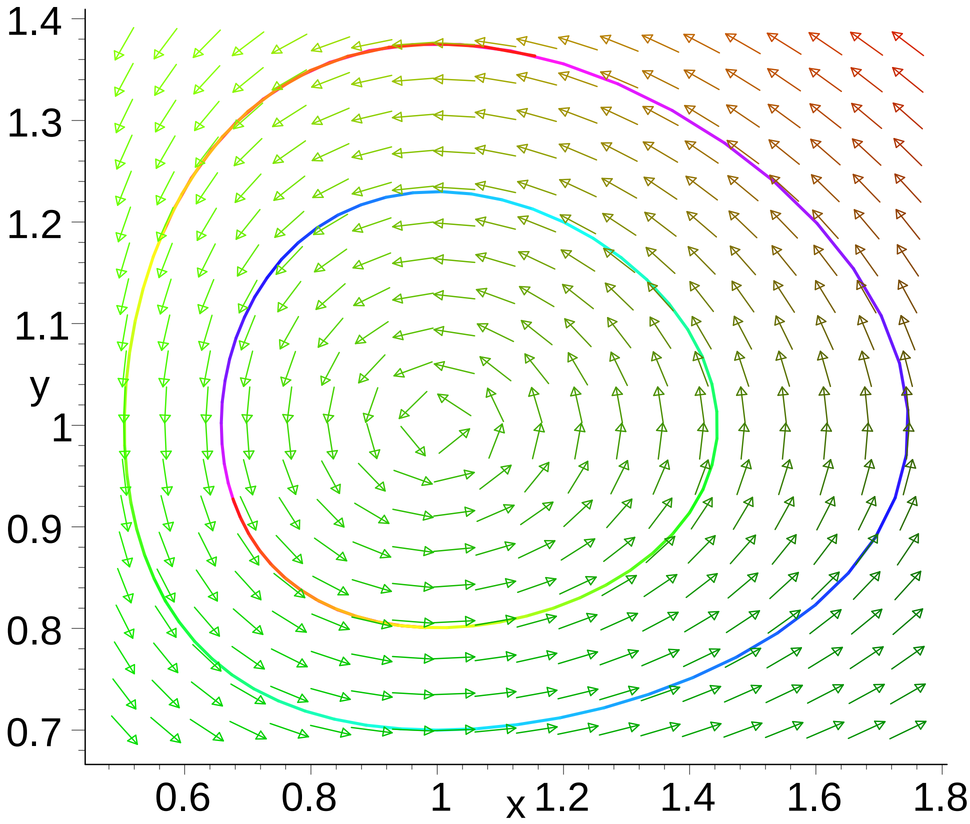
$$x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{at} \qquad y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{-ct} \;.$$

Da a, b positiv sind, stirbt die Räuberpopulation aus während die Beutepopulation exponentiell anwächst. Bei der Punktlösung handelt es sich offenbar um einen Sattel. In einer Phasenraumumgebung um diese Punktlösung ist somit kein Gleichgewicht in Koexistenz zu erwarten.
Lösung in einer Umgebung um $(\frac{c}{b}, \frac{a}{b})$:

$$\begin{array}{rl} \text{Substitution } \bar{y} = y - \dfrac{a}{b} & \qquad \bar{x} = x - \dfrac{c}{b} \\ \dot{\bar{x}} = -c\bar{y} & \qquad \dot{\bar{y}} = a\bar{x} \end{array}$$

Daraus ergeben sich oszillierende Lösungen und somit ein dynamisches Gleichgewicht beider Populationen

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{ac}\,t} \qquad \bar{y}(t) = \bar{y}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{ac}\,t} \;.$$



Stabile Lösung des Volterra-Lotka Modells

Kapitel 3

Gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen n. Ordnung

Wir wollen eine lineare Differentialgleichung n. Ordnung in Operatorschreibweise formulieren

$$L_n[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(t) x^{(\nu)} = r(t) \ ,$$

wobei die gesuchte Lösung x abhängt von der unabhängigen Variablen t, den Ableitungen ν. Ordnung $x^{(\nu)} = \mathrm{d}^\nu x / \mathrm{d}\, t^\nu$ und der Inhomogenität $r(t)$. Ist $r(t) = 0$ nennt man die Linearform $L_n[x] = 0$ eine homogene Differentialgleichung n. Ordnung, sonst eine inhomogene Differentialgleichung. $p_\nu(t)$ sind beliebige Funktionen der unabhängigen Variablen. Der Grad der Differentialgleichung ist 1 (linear in $x^{(\nu)}$).

$L_n[x] = r(t)$ ist die implizite Form einer linearen Differentialgleichung n. Ordnung. Ist $p_n(t) \neq 0$ im Definitionsbereich der unabhängigen Variablen, so lässt sich die Differentialgleichung explizit formulieren

$$x^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{p_\nu}{p_n} x^{(\nu)} + \frac{r(t)}{p_n} \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu(t) x^{(\nu)} + s(t) \ .$$

Wir haben gesehen, dass sich jede Differentialgleichung n. Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung umwandeln lässt. Mit Hilfe der Substitution

$$x^{(j)} = y_{j+1} \quad j = 0, \ldots, n-1$$

folgt aus der expliziten Form

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}, t) \quad f_j = \begin{cases} y_{j+1}, & j = 1, \ldots, n-1 \\ \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu(t) y_{\nu+1} + s(t) & \end{cases} \ .$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitstheorem erhält man bei einer linearen Differentialgleichung n. Ordnung immer eine eindeutige Lösung, die sich als Linearkombination des Fundamentalsystems der homogenen und einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems ergibt.

Eigenschaften:
(a) Betrachte die homogene Differentialgleichung $L_n[x] = 0$. Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ spezielle Lösungen, so ist auch $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ eine Lösung:

$$\begin{aligned} L_n[x] &= L_n[C_1 x_1 + C_2 x_2] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(t)(C_1 x_1^{(\nu)} + C_2 x_2^{(\nu)}) \\ &= C_1 \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x_1^{(\nu)} + C_2 \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x_2^{(\nu)} = C_1 \text{Ł}_n[x_1] + C_2 L_n[x_2] = 0 \; . \end{aligned}$$

(b) Ein System von n speziellen Lösungen $\{x_j(t),\ j = 1, \ldots, n | L_n[x_j] = 0\}$ heißt Fundamentalsystem einer homogenen Differentialgleichung n. Ordnung, wenn die x_j linear unabhängig sind, d.h. wenn gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad a_j = 0 \; , \; j = 1, \ldots, n \; .$$

In diesem Fall ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j(t) \; .$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz ist $x(t)$ eine eindeutige Funktion der Anfangsbedingung $x(t_0), x'(t_0), \ldots x^{(n-1)}(t_0)$. Es gilt für die C_j

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j(t_0) \\ x'(t_0) &= x'_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j x'_j(t_0) \\ &\vdots \\ x^{(n-1)} &= x_0^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j^{(n-1)}(t_0) \; , \end{aligned}$$

d.h. sie sind Lösung des linearen Gleichungssystems unter der Voraussetzung, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x'_1 & \ldots & x'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{Wronski Determinante})$$

nicht verschwindet. Da man diese Eigenschaft für jede beliebige Anfangsbedingung fordern kann, ist sie nur erfüllt, wenn die Lösungen $x_j(t)$ ein Fundamentalsystem bilden, also linear unabhängig sind. Somit ist die Wronski[1] Determinante ein unmittelbarer Test zur

[1] Jozef Maria Hoene- Wronski: ∗ 24.8.1778 in Posen, † 9.8.1853 in Paris. Privatgelehrter und Philosoph. Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen.

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit von Funktionensystemen.

(c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $L_n[x] = r(t)$ ergibt sich als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $L_n[x_h] = 0$ und einer beliebigen speziellen Lösung x_i der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h + x_i \\ L_n[x] &= L_n[x_h + x_i] = L_n[x_h] + L_n[x_i] \\ &= 0 + r(t) = r(t) \ . \end{aligned}$$

(d) Die Ordnung einer Differentialgleichung $L_n[x] = r(t)$ lässt sich auf $n-1$ erniedrigen, wenn man eine spezielle Lösung $x_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung $L_n[x] = 0$ kennt. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h y(t) \\ \bar{L}_{n-1}[y] &= \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(t) y^{(\nu)} = s(t) \ . \end{aligned}$$

3.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Betrachte die Differentialgleichung

$$L_n[x] = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x^{(\nu)}(t) = r(t) \qquad \frac{\mathrm{d}\, p_\nu}{\mathrm{d}\, t} = 0$$

mit $p_\nu \neq 0$ aber konstant. Wir schreiben als Ansatz für die homogene Differentialgleichung $x_h = \exp(\lambda t)$ und erhalten aus $L_n[x] = 0$

$$L_n[\mathrm{e}^{\lambda t}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \lambda^\nu = 0$$

die charakteristische Gleichung. Sie besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra n Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, reell oder komplex, so dass die Funktionen x_j ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung bilden, also

$$x_h(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \, \mathrm{e}^{\lambda_j t}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass alle λ_j verschieden sind. Ist z.B. λ_i eine r-fache Wurzel , so erhält man als Fundamentalsystem

$$\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}, t^2\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}, \ldots, t^{r-1}\, \mathrm{e}^{\lambda_i t} \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_s t}\} \quad s + r = n \ .$$

Beispiel:
Löse die Differentialgleichung $x^{iv} - 4x'' + 4x = 0$ mit dem Ansatz $x = \exp(\lambda t)$. Einsetzen liefert die charakteristische Gleichung $\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 2)^2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = -\sqrt{2}$. Das Fundamentalsystem lautet dann $\{\exp(\sqrt{2}t), t\exp(\sqrt{2}t), \exp(-\sqrt{2}t), t\exp(-\sqrt{2}t)\}$ und die allgemeine Lösung

$$x(t) = \exp(\sqrt{2}t)(C_1 + C_2 t) + \exp(-\sqrt{2}t)(C_3 + C_4 t) \ .$$

Jetzt suchen wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $L_n[x] = r(t)$. Dazu gibt es verschiedenen Methoden, von denen ich nur einige besprechen möchte.

1. Das Verfahren Variation der Konstanten
   Völlig analog zu Kapitel (2.3) machen wir den Ansatz

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)\, \mathrm{e}^{\lambda_j t} \ .$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung benötigt wird. Um die Übersicht zu wahren, möchte ich das Verfahren an einer Differentialgleichung 2. Ordnung demonstrieren:

$$\text{Differentialgleichung:} \qquad mx'' + kx' + cx = r(t)$$

$$\text{homogene Lösung:} \qquad x_h = a\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \ ; \ \lambda_{1/2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}} \ .$$

Ansatz mit Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ x_i'(t) &= a(t)\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b(t)\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + a'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \ . \end{aligned}$$

Da das Gleichungssystem zur Bestimmung <u>einer speziellen</u> Lösung der inhomogenen Differentialgleichung überbestimmt ist, kann man zusätzliche Bedingungen fordern, die die folgende Rechnung vereinfachen (das Ziel ist, höhere Ableitungen von a und b zu vermeiden)

$$\text{Forderung.} \quad a'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = 0$$

Damit erhält man für die zweite Ableitung

$$x_i''(t) = a(t)\lambda_1^2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b(t)\lambda_2^2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + a'(t)\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichungen ergibt unter der Berücksichtigung, dass der blaue Anteil bereits die homogene Differentialgleichung erfüllt

$$\begin{aligned} m(a(t)\lambda_1^2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b(t)\lambda_2^2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}) + k(a(t)\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} &+ b(t)\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}) + c(a(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}) \\ +m(a'(t)\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}) &= r(t) \\ (1) \quad a'(t)\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} &= \frac{r(t)}{m} \\ (2) \quad a'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + b'(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = 0 \ &\Rightarrow \ b'(t) = -a'(t)\,\mathrm{e}^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \end{aligned}$$

$$\text{Einsetzen in (1)} \quad a'(t)(\lambda_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}) \quad = \quad \frac{r(t)}{m}$$

$$a'(t) = \frac{r(t)}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \quad ; \quad b'(t) = -\frac{r(t)}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

$$a(t) = \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{t_0}^{t} r(t') \, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t'} \, \mathrm{d}\, t' \quad ; \quad b(t) = -\frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_{t_0}^{t} r(t') \, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t'} \, \mathrm{d}\, t'$$

Allgemein erhält man mit $L_n[x_h] = 0$; $x_h = \sum_j C_j x_j$ und $L_n[x_i] = r$; $x_i = \sum_j C_j(t) x_j$ die n Gleichungen zur Bestimmung von $C_j'(t)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} C_j'(t) x_j^{(\nu)} &= 0 \quad j = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(t) x_j^{(n-1)} &= \frac{r}{p_n} \end{aligned}$$

durch Lösung des Gleichungssystems. Die gesuchten Koeffizienten ergeben sich danach durch Integration

$$C_j(t) = \int_{t_0}^{t} C_j(t') \, \mathrm{d}\, t' \; .$$

2. In vielen Fällen kann man die spezielle Lösung einfacher ermitteln, indem man einen Ansatz aus der gleichen Funktionenklasse, der auch die Inhomogenität $r(t)$ angehört ausprobiert:

$$\begin{array}{ccc} h(t) = a & \cdots & x_i(t) = A(t) \\ \left\{ \begin{array}{rcl} h(t) & = & t^n \\ & = & \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \end{array} \right\} & \cdots & x_i(t) = \sum_{j=0}^{n} A_j(t) t^j \\ h(t) = a \, \mathrm{e}^{\alpha t} & \cdots & x_i(t) = A(t) \, \mathrm{e}^{\alpha t} \\ \left\{ \begin{array}{rcl} h(t) & = & \sin kt \\ & = & \cos kt \end{array} \right\} & \cdots & x_i(t) = A(t) \sin kt + B(t) \cos kt \end{array}$$

3. Heaviside'sche Operatormethode:
Betrachten wir noch einmal als Beispiel die allgemeine Form einer Differentialgleichung 2. Ordnung $mx'' + kx' + cx = r(t)$. Diese Differentialgleichung können wir durch die Einführung des Differentialoperators $\mathcal{D} \equiv \mathrm{d} / \mathrm{d}\, t$ formal umschreiben

$$(\mathcal{D} - \lambda_1)(\mathcal{D} - \lambda_2)x = \frac{r(t)}{m} = \bar{r}(t) \; .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - \lambda_1)(\mathcal{D} - \lambda_2)x &= (\mathcal{D}^2 - \lambda_1 \mathcal{D} - \lambda_2 \mathcal{D} + \lambda_1 \lambda_2)x = \frac{r}{m} \\ mx'' - m(\lambda_1 + \lambda_2)x' + m\lambda_1\lambda_2 x &= r \\ \Rightarrow \quad m(\lambda_1 + \lambda_2) &= -k \end{aligned}$$

$$m\lambda_1\lambda_2 = c \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{c}{m\lambda_1}$$
$$m(\lambda_1 + \frac{c}{m\lambda_1}) = -k \quad \rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}} \; .$$

Eine Partikulärlösung dieser Differentialgleichung erhält man durch die algebraische Auflösung nach x

$$x_i(t) = \frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_1)(\mathcal{D} - \lambda_2)}\bar{r}(t) \; .$$

Man muss jedoch mit inversen Differentialoperatoren achtsam umgehen. Wir tun dies wie folgt:

$$x_i(t) = \frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_1}[\frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_2}\bar{r}(t)] =: \frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_1}y(t) \; .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_2}r(t) = y(t) \qquad &\rightarrow \qquad y' - \lambda_2 y = \bar{r}(t) \\ y(t) \quad &= \quad \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \int \bar{r}(t')\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 t'}\,dt' \end{aligned}$$

und damit

$$x_i(t) = \frac{1}{\mathcal{D} - \lambda_1}y(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \int y(t')\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t'}\,dt' \; .$$

Als Beispiel betrachte die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \mathrm{e}^t$$

mit der Operatorzerlegung

$$(\mathcal{D} - 2)(\mathcal{D} - 1)x = \mathrm{e}^t \; .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man sofort aus dieser Zerlegung zu

$$x_h(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^t \; .$$

Die Partikulärlösung erhält man aus folgender Rechnung

$$\begin{aligned} \dot{y} - y \quad &= \quad \mathrm{e}^t \\ y \quad &= \quad \mathrm{e}^t \int \mathrm{e}^{t'}\,\mathrm{e}^{-t'}\,dt' = t\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x_i(t) \quad &= \quad \mathrm{e}^{2t} \int \mathrm{e}^{t'}\,t'\,\mathrm{e}^{-2t'}\,dt' = \mathrm{e}^{2t} \int t'\,\mathrm{e}^{-t'}\,dt' \\ &= \quad \mathrm{e}^{2t}(-t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) = -t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \; . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= \quad A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \\ &= \quad A\,\mathrm{e}^{2t} + B'\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t \; . \end{aligned}$$

3.2 Euler'sche Differentialgleichung

Die Euler'sche Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit spezieller nichtkonstanter Koeffizientenstruktur

$$L_n[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu t^\nu x^{(\nu)} = r(t) \ .$$

Sie lässt sich mit Hilfe einer Substitution auf eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückführen

$$\begin{aligned}
s = \ln t \quad &\rightarrow \quad t = \mathrm{e}^S \ ; \ \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,s} = t \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,s} = tx' \\
\frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,s^2} \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(tx') = tx' + t(tx'') = tx' + t^2x'' \\
\Rightarrow t^2x'' \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,s^2} - \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} == \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - 1)x \\
&\ \ \vdots \\
t^\nu x^\nu \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - 1)x \ldots (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - \nu + 1)x \ .
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Eulergleichung

$$\begin{aligned}
L_n[x] \quad &= \quad \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu t^\nu x^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - 1) \ldots (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - \nu + 1)x \\
&= \quad \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \mathcal{D}^{(\nu)} x = r(\mathrm{e}^s)
\end{aligned}$$

eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, aber modifiziertem Differentialoperator

$$\mathcal{D}^{(\nu)} \equiv \prod_{j=0}^{\nu-1} (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - j) \ .$$

Jetzt kann man alle Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten anwenden. Wir wählen als Ansatz für die homogene Gleichung $x = \exp(\lambda s)$ und erhalten als charakteristische Gleichung mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(\nu)}\,\mathrm{e}^{\lambda s} \quad &= \quad \prod_{j=0}^{\nu-1} (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} - j)\,\mathrm{e}^{\lambda s} = \prod_{j=0}^{\nu-1} (\lambda - j)\,\mathrm{e}^{\lambda s} \\
L_n[\mathrm{e}^{\lambda s}] = 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \prod_{j=0}^{\nu-1} (\lambda - j) = 0 \\
p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda(\lambda - 1) + \quad &\ldots \quad + p_n\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Gleichung n. Ordnung in λ. Besitzt sie n verschiedene Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, so bilden die $\{\exp(\lambda_j s, j = 1, \ldots n\}$ ein Fundamentalsystem und man erhält als allgemeine Lösung der homogenen Eulergleichung

$$x_h(s) = \sum_{j=1}^{n} C_j \, \mathrm{e}^{\lambda_j s} \, ,$$

bzw. mit $s = \ln t$

$$x_h(s) = \sum_{j=1}^{n} C_j \, \mathrm{e}^{\lambda_j \ln t} = \sum_{j=1}^{n} C_j t^{\lambda_j} \, .$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L_n[x] = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(t) x^{(\nu)} = r(t)$$

mit periodischen Koeffizienten der Form

$$p_\nu(t + 2\pi) = p_\nu(t)$$

und periodischer Inhomogenität

$$r(t + 2\pi) = r(t) \, .$$

Das Theorem von Floquet besagt, dass die Lösung $x(t)$ dann folgende Eigenschaften besitzt

$$x(t + 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi\mu} \, x(t) \, .$$

Speziell für $\exp(2\pi\mu) = 1$ erhält man periodische Lösungen im engeren Sinne. Das Theorem ermöglicht, den Definitionsbereich für die Bestimmung der Lösung auf eine Periode einzuschränken. Aus der Kenntnis der Lösung in einem beliebigen Bereich 2π kann man dann auf den gesamten Definitionsbereich schließen.

Kapitel 4

Potenzreihenansatz zur Lösung spezieller linearer Differentialgleichungen

Eine sehr wichtige Klasse von Funktionen wird durch die Differentialgleichung

$$xy'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0 \quad \beta > 0$$

definiert. Es handelt sich dabei um eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$L_2[y] = \sum_{\nu=0}^{2} p_\nu(x) y^{(\nu)} = 0 \; .$$

Da die Koeffizienten nicht konstant, sondern Polynome in der unabhängigen Variablen sind, muss man sich um ein neues Lösungsverfahren bemühen. Unter bestimmten Bedingungen (siehe unten) lässt sich die Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz lösen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \\
y'(x) &= x^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu) a_\nu x^\nu \\
y''(x) &= x^{m-2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu-1)(m+\nu) a_\nu x^\nu \; .
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Sortieren nach gleichen Potenzen in x ergibt

$$\begin{aligned}
x^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu-1)(m+\nu) a_\nu x^\nu &+ \beta x^{m-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu) a_\nu x^\nu \\
&- x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu) a_\nu x^\nu - \alpha x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu) a_\nu x^\nu = 0 \\
\text{Term1} &= x^{(m-1)}(m-1) m a_0 + x^m \sum_{\nu=1}^{\infty} (m+\nu-1)(m+\nu) a_\nu x^{\nu-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{(m-1)}(m-1)ma_0 + x^m \sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu)(m+\nu+1)a_{\nu+1}x^\nu \\
\text{Term2} &= \beta x^{(m-1)}ma_0 + \beta x^m \sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu+1)a_{\nu+1}x^\nu \\
x^{m-1}a_0[(m-1)m+\beta m] &+ x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu[(m+\nu)(m+\nu+1)a_{\nu+1} \\
&+ \beta(m+\nu+1)a_{\nu+1} - (m+\nu)a_\nu \alpha a_\nu] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Relation muss für alle x gelten, d.h. der Ansatz ist nur dann eine Lösung, wenn alle Koeffizienten verschwinden [1]

$$
\begin{aligned}
0 &= [(m-1)m+\beta m] = m(m-1+\beta) \quad \Rightarrow \quad m=0 \quad m=1-\beta \\
0 &= a_{\nu+1}[(m+\nu+1)(m+\nu+\beta)] - a_\nu(m+\nu+\alpha) \\
\rightarrow\ a_{\nu+1} &= a_\nu \frac{m+\nu+\alpha}{(m+\nu+1)(m+\nu+\beta)}\,.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung für den Potenzreihenansatz ist, dass die Rekursionsformel erfüllt werden kann. Damit die Rekursion 'anläuft', muss a_0 vorgegeben werden. I.a. wählt man

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
\rightarrow\quad a_1 &= \frac{m+\alpha}{(m+1)(m+\beta)} \\
a_2 &= \frac{m+\alpha}{(m+1)(m+\beta)}\frac{m+\alpha+1}{(m+2)(m+\beta+1)} \\
&\ \vdots \\
a_n &= \frac{(m+\alpha)(m+\alpha+1)\ldots(m+\alpha+n-1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)(m+\beta)(m+\beta+1)\ldots(m+\beta+n-1)} \\
&\ \vdots \quad .
\end{aligned}
$$

D.h. wir erhalten insgesamt zwei linear unabhängige Lösungen als Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung für $m=0$ und $m=1-\beta$:

$$
\begin{aligned}
m=0: \quad y_1 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(m=0)x^\nu = 1 + \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\beta(\beta+1)}x^2 + \ldots \\
m=1-\beta: \quad y_2 &= x^{1-\beta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{a}_\nu(m=1-\beta)x^\nu = x^{1-\beta}(1+\frac{1-\beta+\alpha}{2-\beta}x+\ldots)\,.
\end{aligned}
$$

Man nennt y_1 die konfluente hypergeometrische Funktion und schreibt

$$y_1 \equiv F(\alpha,\beta;x) \quad \beta > 0\,.$$

Dann ist y_2

$$y_2 \equiv x^{1-\beta}F(\alpha-\beta+1, 2-\beta; x) \quad \beta > 0\,.$$

[1] Ein analoges Argument: die Monome bilden ein linear unabhängiges Funktionensystem, somit müssen die Koeffizienten verschwinden

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Konsequenz der Linearität der Differentialgleichung als Superposition der Lösungen des Fundamentalsystems

$$y = C_1 F(\alpha, \beta; x) + C_2 x^{1-\beta} F(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta; x) \ .$$

Die spezielle Lösung $y_1(x)$ ist regulär bei $x = 0$, d.h.

$$\lim_{x \to 0} y_1 = \lim_{x \to 0} F(\alpha, \beta; x) = 1 \ ,$$

wie man sich aus der Potenzreihendarstellung überlegen kann. y_2 dagegen ist i.a. nicht regulär (irregulär), d.h. besitzt eine Singularität bei $x = 0$, abhängig von der Größe von β

$$\lim_{x \to 0} y_2 = \lim_{x \to 0} x^{1-\beta} \to \infty \quad 1 - \beta < 0 \ .$$

- Rekursionsformeln:
  Da $F(\alpha, \beta; x)$ als Potenzreihe mit bekannter Rekursionsformel für die Koeffizienten definiert ist, ergeben sich einfache Relationen

$$\begin{aligned}
(\beta - \alpha) F(\alpha - 1, \beta; x) + (2\alpha - \beta + x) F(\alpha, \beta; x) &= \alpha F(\alpha + 1, \beta; x) \\
(\beta - \alpha + 1) F(\alpha, \beta; x) + (\beta - 1) F(\alpha, \beta - 1; x) &= \alpha F(\alpha + 1, \beta; x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} F(\alpha, \beta; x) &= \frac{\alpha}{\beta} F(\alpha + 1, \beta + 1; x) \ .
\end{aligned}$$

- Spezialfälle:
  Einige elementare Funktionen lassen sich über die Identifikation ihrer jeweiligen Taylorentwicklungen als Spezialfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktion formulieren:
  (i) $\alpha = \beta \to$ Exponentialfunktion:

$$F(\alpha, \alpha; x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \mathrm{e}^x \ .$$

  (ii) $\alpha = 1 \ , \ \beta = 2 \ , \ x = -2\,\mathrm{i}\,\xi \to$ Trigonometrische Funktionen:

$$F(1, 2; -2\,\mathrm{i}\,\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi}}{\xi} \sin \xi \ .$$

  (iii) $\alpha = 1 \ , \ \beta = 2 \ , \ x = 2\xi \to$ Hyperbelfunktionen:

$$F(1, 2; 2\xi) = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi} \sinh \xi \ .$$

  (iv) $\alpha = 0.5 \ , \ \beta = 1.5 \ , \ x = -\xi^2 \to$ Fehlerfunktionen:

$$\begin{aligned}
F(0.5, 1.5; -\xi^2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi} \operatorname{erf} \xi \\
\operatorname{erf} \xi &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}\, t \ .
\end{aligned}$$

4.1 Spezielle Funktionen der theoretischen Physik

Eine Reihe weiterer Spezialfälle erhält man, wenn α eine negative ganze Zahl wird. In diesem Fall bricht die Rekursionsformel (z.B. für $m = 0$) ab und man erhält

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &= a_\nu \frac{\nu - n}{(\nu+1)(\nu+\beta)} \\ \nu = n \quad a_{n+1} &= a_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots = 0 \,. \end{aligned}$$

D.h. die konfluente hypergeometrische Funktion ist für $\alpha = -n$ ein Polynom n. Grades

$$F(-n, \beta; x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \,.$$

Dieser Spezialfall generiert eine Reihe spezieller Funktionen der theoretischen Physik, die ich im Folgenden etwas detaillierter betrachten möchte. Explizit erhält man für das Polynom

$$F(-n, \beta; x) = 1 - \frac{n}{\beta} x - \frac{n(1-n)}{\beta(1+\beta)} \frac{x^2}{2!} - \frac{n(1-n)(2-n)}{\beta(1+\beta)(2+\beta)} \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\nu - n)}{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\nu+\beta)} \frac{x^n}{n!} \,.$$

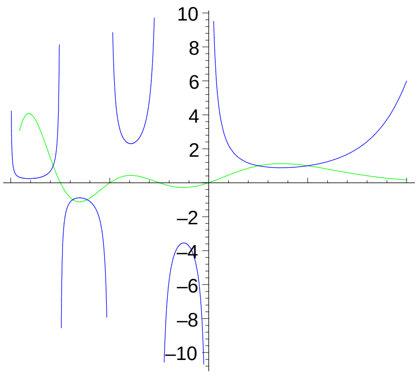
Diese Polynome lassen sich allgemein über eine erzeugende Funktion definieren, z.B.

$$\begin{aligned} F(-2,3;x) &= 1 - \frac{2}{3} x + \frac{1}{12} x^2 \\ \text{erzeugende Funktion:} \quad F(-2,3;x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{12 x^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, x^2} (x^4\, \mathrm{e}^{-x}) \,. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form der erzeugenden Funktion lautet

$$F(-n, \beta; x) = \frac{x^{1-\beta}\, \mathrm{e}^x\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} (x^{\beta+n-1}\, \mathrm{e}^{-x}) \,.$$

$\Gamma(x)$ heißt Gamma Funktion. Sie ist eine Erweiterung der Fakultät mit den Eigenschaften:



Γ Funktion (blau) und inverse Γ Funktion (grün)

$$\begin{aligned} \Gamma(m) &= (m-1)! \\ \Gamma(-m) &= \pm\infty \\ \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}\, t \,; \text{Integraldarstellung} \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}\, t = 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}\, t \\ &= \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\,(\infty) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

1. Hermite Polynome
Die Differentialgleichung für die Hermite Polynome[2]

$$H''(z) - 2zH'(z) + 2nH(z) = 0$$

ergibt sich aus der Differentialgleichung für konfluente hypergeometrische Funktionen durch die Substitution

$$\begin{aligned} z^2 &= x \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} &= \frac{1}{2z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} &= \frac{1}{4z^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,z^2} - \frac{1}{4z^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} \ . \end{aligned}$$

Einsetzen der Substitution in die Differentialgleichung für die konfluente hypergeometrische Funktion liefert

$$\begin{aligned} [\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,z^2} - \frac{1}{4z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} + (\beta - z^2)\frac{1}{2z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} - \alpha]y &= 0 \\ y'' + (2\beta - 1)\frac{1}{z}y' - 2zy' - 4\alpha y &= 0 \ . \end{aligned}$$

Damit wir aus dieser Form die Hermite'sche Differentialgleichung erhalten, müssen wir für α und β folgende Wahl treffen:

$$\begin{aligned} 2\beta - 1 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{2} \\ -4\alpha = 2n \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{n}{2} \ . \end{aligned}$$

Zunächst fällt auf, dass α nicht ganzzahlig ist, die Rekursionsformel für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung also nicht trivial abbricht. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- $n \longrightarrow 2n$ gerade $\longrightarrow \ \alpha = -\frac{2n}{2} = -n$ ganzzahlig:
  die Rekursionsformel bricht für $m = 0$ ab und es gilt

$$H_{2n}(z) = (-1)^n \frac{2n)!}{n!} F(-n, \frac{1}{2}; z^2) \ .$$

- $n \longrightarrow 2n + 1$ ungerade:
  In diesem Fall gilt für die Rekursion

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &= a_\nu \frac{m + \nu + \alpha}{(m + \nu + 1)(m + \nu + \beta)} \\ &= a_\nu \frac{\nu - (n-1)/2}{(\nu + 3/2)(\nu + 1)} \quad m = 1 - \beta = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

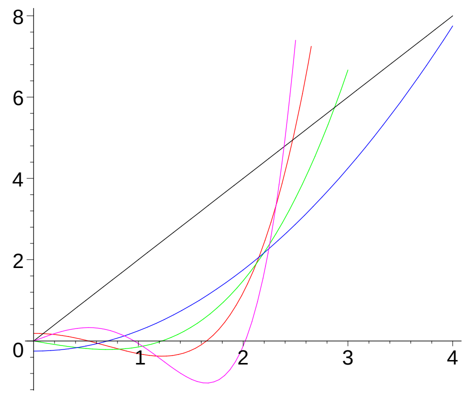
[2]Charles Hermite: $*$ 24.12.1822 in Dieuze † 14.1.1901 in Paris. Mathematiker an der Sorbonne (Paris). Arbeiten zur Theorie elliptischer Funktionen und Invariantentheorie.

Die Rekursionsformel bricht in diesem Falle nur für die Lösung $m = 1 - \beta$ ab, da $\frac{n-1}{2}$ ganzzahlig ist und man erhält

$$\begin{aligned} y &= (z^2)^{1-\beta} F(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta; z^2) \\ &= zF(-\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}; z^2) \end{aligned}$$

bzw. über die Rekursionsformeln für die Funktionen F

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{2n+1)!}{n!} 2zF(-n, \frac{3}{2}; z^2) \ .$$



Hermite Polynome: $H_1(z)$: schwarz, $H_2(z)$: blau, $H_3(z)$: grün, $H_4(z)$: rot, $H_5(z)$: magenta

2. Laguerre Polynome
   Die Differentialgleichung für die Laguerre Polynome lautet

$$xL'' + (1 - x)L' + nL = 0 \ .$$

Sie ist ebenfalls ein Spezialfall der Differentialgleichung für die konfluente hypergeometrische Funktion, wenn man annimmt, dass

$$\beta = 1 \quad \alpha = -n \ .$$

Die Lösungen lassen sich somit auf die regulären F $(m = 0)$ zurückführen und man erhält

$$L_n(x) = F(-n, 1; x) \ .$$

Die erzeugende Funktion ergibt sich ebenfalls aus der erzeugenden Funktion für F

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} (x^n \, \mathrm{e}^{-x}) \ .$$

Spezialfälle sind
$L_0(x) = 1$; $L_1(x) = 1 - x$; $L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2$; $L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6$
Zur selben Klasse gehören die zugeordneten Laguerre Polynome. Sie erfüllen die Differentialgleichung

$$xL_n^{m\prime\prime}(x) + (m + 1 - x)L_n^{m\prime}(x) + (n - m)L_n^m(x) = 0 \ ,$$

die ebenfalls ein Spezialfall der konfluenten hypergeometrischen Funktion für

$$\beta = m + 1 \quad \alpha = -n + m$$

ist. Somit gilt

$$L_n^m(x) = F(-n + m, m + 1; x) \quad n \geq m \; .$$

Durch sukzessive Anwendung von

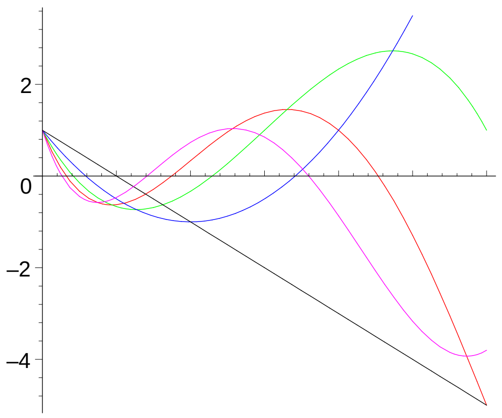
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} F(\alpha, \beta; x) = \frac{\alpha}{\beta} F(\alpha + 1, \beta + 1; x)$$

erhält man

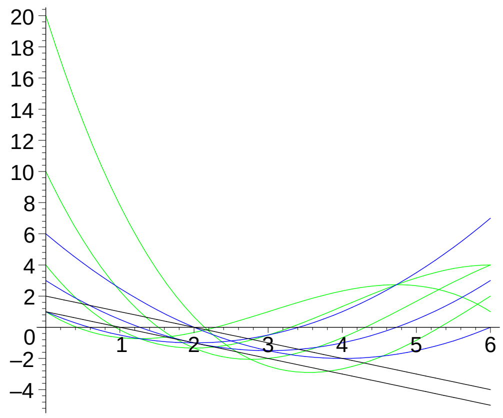
$$L_n^m(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, x^m} F(-n, 1; x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, x^m} L_n(x) \; .$$

D.h. die zugeordneten Laguerre Polynome ergeben sich durch m-fache Ableitung der gewöhnlichen Laguerre Polynome

Zugeordnete Laguerre Polynome		
$L_0^0(x) = 1$	$L_1^0(x) = 1 - x$ $L_1^1(x) = -1$	$L_2^0(x) = 1 - 2x + x^2/2$ $L_2^1(x) = -2 + x$ $L_2^2(x) = 1$



Laguerre Polynome: $L_1(z)$: schwarz, $L_2(z)$: blau, $L_3(z)$: grün, $L_4(z)$: rot, $L_5(z)$: magenta



Zugeordnete Laguerre Polynome: $L_1^m(z)$: schwarz, $L_2^m(z)$: blau, $L_3^m(z)$: grün

3. Bessel Funktionen:
   Die Bessel'sche Differentialgleichung[3]

$$J_p''(z) + \frac{1}{z} J_p'(z) + (1 - \frac{p^2}{z^2}) J_p(z) = 0$$

[3]Friedrich Wilhelm Bessel: ∗ 22.7.1784 in Minden † 17.3.1846 Königsberg. Professor für Astronomie in Königsberg. Arbeiten zur Theorie von Differentialgleichungen und Bessel'sche Funktionen.

definiert die Besselfunktionen erster Art für $p \in \mathcal{N}_0$

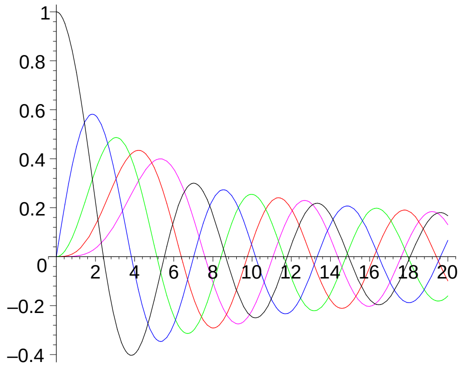
$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} (\frac{z}{2})^{p+2k} .$$

Sie lassen sich durch geeignete Substitutionen ebenfalls durch die konfluente hypergeometrische Funktion ausdrücken

$$J_p(z) = \frac{1}{p!} (\frac{z}{2})^p \, \mathrm{e}^{-z} \, F(p+0.5, 2p+1; 2z) .$$

Für den Fall, dass p nicht ganzzahlig ist, findet man mit J_p auch in J_{-p} eine spezielle Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung gibt man dann i.a. in Form der Neumann'schen Funktionen (Besselfunktionen 2. Art) an

$$\begin{aligned} N_p(z) &= \frac{1}{\sin p\pi} (J_p(z) \cos p\pi - J_{-p}(z)) \\ J_p(z) &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} (\frac{z}{2})^p \, \mathrm{e}^{-z} \, F(p+0.5, 2p+1; 2z) . \end{aligned}$$



Bessel Funktionen $J_0(z)$: schwarz, $J_1(z)$: blau, $J_2(z)$: grün, $J_3(z)$: rot, $J_4(z)$: magenta

Eine asymptotische Darstellung von J_p für große z und beliebige p ist

$$J_p(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{p}{2}\pi - \frac{\pi}{4}) .$$

Sie werden im Rahmen der Quantenmechanik öfter halbzahlige Besselfunktionen betrachten (sphärische Besselfunktionen). Sie sind definiert über

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z)$$

und

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-l-1/2}(z) .$$

Asymptotisch gehen die sphärischen Besselfunktionen über in

$$\begin{aligned} j_l(z \to \infty) &\to \frac{1}{z} \cos(z - \frac{l+1}{2}\pi) \\ n_l(z \to \infty) &\to \frac{(-)^{l+1}}{z} \cos(z + \frac{l}{2}\pi) . \end{aligned}$$

4.2 Legendre Polynome und Kugelflächenfunktionen

Vertreter einer anderen Klasse spezieller Funktionen sind die Legendre Polynome,[4] die durch die Legendre'sche Differentialgleichung definiert werden

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad x \in [-1,1] \ .$$

Auch in diesem Fall setzen wir für die Lösung $y(x)$ eine Potenzreihe der Form

$$y(x) = x^n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\nu}$$

an und erhalten für die Koeffizienten c_ν die Rekursion

$$(n-\nu+2)(n-\nu+1)c_{\nu-2} = -\nu(2n+1-\nu)c_\nu \ .$$

Offenbar bricht die Rekursionsformel für $\nu > n$ ab, so dass die $y(x)$ Polynome des Grades n sind. Mit $c_0 = 1$ ergibt sich dann explizit für <u>gerade n</u>

$$y_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} \mp \dots$$

bzw mit $c_1 = 1$ für <u>ungerade n</u>

$$y_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} \mp \dots$$

Man definiert normierte Legendre Polynome in Relation zu den y_n

$$y_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)$$

und erhält in den niedrigsten Ordnungen

$$P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \ .$$

Auch die Legendre Polynome spielen eine besondere Rolle. Sie sind die Entwicklungskoeffizienten der folgenden Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \ .$$

Dahinter verbirgt sich die Multipolentwicklung des Coulomb Potentials

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos(\vec{a},\vec{r}) + r^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{1-2xh+h^2}} & r < a \ ; \ h = \frac{r}{a} \ ; \ x = \cos(\vec{a},\vec{r}) \\ \frac{1}{r\sqrt{1-2xh+h^2}} & r > a \ ; \ h = \frac{a}{r} \ ; \ x = \cos(\vec{a},\vec{r}) \end{cases} \ . \end{aligned}$$

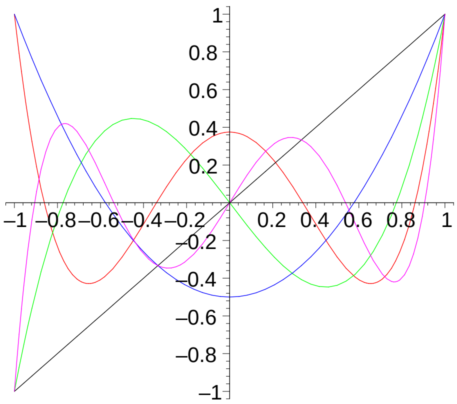
[4] Adrien Marie Legendre: ∗ 18.9.1752 in Paris † 10.1.1833 in Paris. Professor an verschiedenen Pariser Schulen. Arbeiten zur Zahlentheorie, Geodäsie, euklidische Geometrie, Variationsrechnung und Astronomie.

Man kann die Legendre Polynome ebenfalls über eine erzeugende Funktion definieren (Formel von Rodrigues)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}(x^2-1)^n \; .$$

Die Legendre Polynome bilden ein vollständiges und orthogonales Funktionensystem. Für deren Skalarprodukt gilt

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\;\mathrm{d}\,x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \; .$$



Legendre Polynome $P_1(z)$: schwarz, $P_2(z)$: blau, $P_3(z)$: grün, $P_4(z)$: rot, $P_5(z)$: magenta

Die Legendre Polynome sind ihrerseits wieder ein Spezialfall der zugeordneten Legendre Polynome. Sie werden durch die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

definiert. Diese Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe der Substitution $y = (x^2-1)^{m/2}f$ in folgender Weise auf die Legendre'sch Differentialgleichung zurückführen: man erhält im ersten Schritt nach Einsetzen der Substitution eine Differentialgleichung für die neue Funktion f

$$(1-x^2)f'' - 2(m+1)xf' + (n-m)(n+m+1)f = 0 \; .$$

Differenziert man andererseits die Legendre'sche Differentialgleichung m mal nach x, so erhält man

$$[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} - 2(m+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} + (n-m)(n+m+1)]\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}\,x^m} = 0 \; .$$

Ein Vergleich der letzten beiden Differentialgleichungen gibt im zweiten Schritt unmittelbar die Lösung

$$y \equiv P_n^m(x) = (x^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}\,x^m} \; ,$$

d.h. die zugeordneten Legendre Polynome lassen sich aus den einfachen Legendre Polynomen generieren. Sie bilden ebenfalls ein vollständiges Orthogonalsystem (Achtung: m ist identisch!)

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^m(x)\;\mathrm{d}\,x = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(-1)^m\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'} \; .$$

Für die theoretische Physik sind die aus den Legendre Polynomen abgeleiteten Kugelflächenfunktionen von großer Bedeutung. Man definiert

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\phi} \ .$$

Legendre Polynome und Kugelflächenfunktionen sind ein Spezialfall der hypergeometrischen Funktion $F(a,b;c;x)$, die eine Lösung der Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0$$

darstellt.

Kapitel 5

Spezielle Aspekte partieller Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen definieren Lösungen mehrerer unabhängiger Veränderliche. Sie sind von zentraler Bedeutung in der theoretischen Physik. So gleicht in manchen Lehrbüchern die Einführung in die Elektrodynamik stellenweise einer Einführung in die Theorie partieller Differentialgleichungen.
Wir werden uns in diesem Kapitel auf partielle, lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung spezialisieren. Sie bilden den mathematischen Rahmen für die Elektrodynamik, Quantenmechanik, Statistische Physik und Thermodynamik, also den 'klassischen Gebieten' der theoretischen Physik. In Kapitel 1 haben wir bereits eine weitere Klassifikation mit Beispielen dieses Typs von Differentialgleichungen kennen gelernt.
Um die Lösungsmethoden möglichst anwendungsnah zu diskutieren, werde ich mich auf eine Darstellung der Methoden am Beispiel der Laplace- bzw Poisson Gleichung beschränken.

5.1 Separation partieller Differentialgleichungen

Ziel eines Separationsansatzes ist, eine partielle Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in den jeweiligen unabhängigen Koordinaten zurückzuführen. Im einfachsten Fall lässt sich das mit Hilfe eines Produktansatzes erreichen (siehe dieses Kapitel), allgemeiner benötigt man eine Darstellung der Lösung nach bestimmten Funktionensystemen (siehe Kapitel 5.3).

5.1.1 Die Laplace Gleichung

Die Laplace Gleichung $\triangle V(\vec{r}) = 0$ ist eine partielle homogene Differentialgleichung vom elliptischen Typ. Ihre Lösung $V(\vec{r})$ beschreibt z.B. das elektrostatische Potential innerhalb eines von Randflächen begrenzten Volumens, das von einer Ladungsverteilung außerhalb dieses Volumens erzeugt wird. Die Randbedingungen – Vorgabe des Potentials auf der

Grenzfläche (Dirichlet'sche Randbedingung)[1], bzw das elektrostatische Feld (Richtungsableitung des Potentials) entlang der Flächennormalen (v. Neumann'sche[2] Randbedingung) – bzw genauer die Geometrie der Randflächen definieren die Symmeterie des Problems. Für die verschiedenen Symmetrien erhält man eine jeweils andere Darstellung des Laplace Operators $\triangle$

Symmetrieangepaßte Koordinaten		
Randfläche	**Koordinaten**	**Darstellung von $\triangle$**
Quader	$x \quad y \quad z$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Kugel	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}$ $\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$ $+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$
Zylinder	$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}$	$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

5.1.2 Der Produktansatz

Als ein Beispiel für die Variablenseparation mit Hilfe eines Produktansatzes, wollen wir die Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten lösen

$$\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\}V = 0\ .$$

In diesem Fall wählen wir als Separationsansatz

$$V(\vec{r}) = \frac{U(r)}{r}P(\theta)\Phi(\phi)\ .$$

Einsetzen und Multiplikation mit $r^2\sin^2\theta/UP\Phi$ liefert

$$r^2\sin^2\theta\{\frac{1}{U}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta})\} + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0\ .$$

Man sieht, dass Term 1 unabhängig von ϕ ist, während der zweite Ausdruck ausschließlich von ϕ abhängt. Da die Koordinaten r, θ, ϕ jeden beliebigen Wert annehmen können und voneinander unabhängig sind, kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn beide Terme für sich konstant sind. Wir definieren somit eine Separationskonstante m^2 und schreiben

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2 \quad \rightarrow \quad \Phi'' + m^2\Phi = 0\ .$$

[1]Peter Gustav Lejeune-Dirichlet: ∗ 13.2.1805 in Düren † 5.5.1859 in Göttingen. Privatlehrer in Paris, Dozent in Breslau und Berlin, seit 1855 Nachfolger von Gauss in Göttingen. Beiträge zur Theorie der Fourierreihen, Potentialtheorie, Variationsrechnung und Zahlentheorie.

[2]Johann von Neumann: ∗ 28.12.1903 in Budapest † 8.2.1957 in Princeton (USA). Mathematiker, Physiker und Chemiker! Professor in Princeton. Beiträge zur Mengenlehre, Topologie, Gruppentheorie, Operatortheorie, Spieltheorie und zur Theorie elektronischer Rechenmaschinen.

Somit bleibt zu untersuchen

$$r^2\frac{1}{U}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta})-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\}=0\ .$$

Jetzt haben wir eine Separation in den verbleibenden Koordinaten r und θ erreicht. Die Gleichung kann für beliebige Werte der Koordinaten nur verschwinden, falls jeder der beiden Terme für sich konstant (Separationskonstante c) ist. Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{U(r)}{r}P(\theta)\Phi(\phi)\\
\Phi''+m^2\Phi &= 0\\
U''-\frac{c}{r^2}U &= 0\\
P''-\cot\theta P'+(c-\frac{m^2}{\sin^2\theta}) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Laplace Gleichung in gewöhnliche Differentialgleichungen der jeweiligen Koordinaten umgeformt. Im Folgenden werden wir die Differentialgleichungen lösen und gleichzeitig die Separationskonstanten m und c bestimmen.

1. $\Phi''+m^2\Phi=0$
   Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators mit dem Fundamentalsystem $\Phi_\pm(\phi)=\exp(\pm\,\mathrm{i}\,m\phi)$. Da die Lösung für beliebige ϕ eindeutig sein muss, fordern wir die Bedingung $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$ mit der Konsequenz

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,m\phi}\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,m2\pi} &= \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,m\phi}\\
\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,m2\pi} &= 1 \quad\rightarrow\quad m\in\mathcal{N}_0\\
\Phi_\pm(\phi) &= \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,m\phi}\quad m\in\mathcal{N}_0\ .
\end{aligned}$$

2. Differentialgleichung für $P(\theta)$:
   Substituiert man $x=\cos\theta$ und für die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ so ergibt sich aus der Differentialgleichung für $P(\theta)$

$$(1-x^2)P''-2xP'+(c-\frac{m^2}{1-x^2})P=0\ .$$

   Das ist die Differentialgleichung für die zugeordneten Legendre Polynome $P_l^m(x)$ (siehe Kapitel 4), falls man folgende Wahl für die Separationskonstanten trifft

$$c=l(l+1)\quad |m|\le l\quad l\in\mathcal{N}_0\ .$$

   Man sieht, dass die Separationskonstanten nicht eindeutig sind, sondern verschiedene ganzzahlige Werte annehmen können.

3. Differentialgleichung für $U(r)$:
   Für die verbleibende radiale Differentialgleichung

$$U''-\frac{l(l+1)}{r^2}U=0$$

machen wir den Ansatz

$$u(r) = ar^{l+1} + br^{-l} \ .$$

Einsetzen bestätigt, dass der Ansatz eine Lösung der Radialgleichung ist:

$$0 = a(l+1)lr^{l-1} + bl(l+1)r^{-l-2} - a\frac{l(l+1)}{r^2}r^{l+1} - b\frac{l(l+1)}{r^2}r^{-l} \ .$$

Somit haben wir als Lösung der Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten die allgemeine Lösung für beliebige $l, m \in \mathcal{N}_0, \ |m| \leq l$

$$V_{lm}(\vec{r}) = a_l(r^l + \frac{b_l}{a_l}r^{-l-1})P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,m\phi} \ .$$

Da die Laplace Gleichung linear ist, wird auch eine beliebige Linearkombination der V_{lm} eine Lösung darstellen

$$V(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l(r^l + \frac{b_l}{a_l}r^{-l-1})P_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\phi} \ .$$

Die Koeffizienten a_l und b_l werden aus den physikalischen Randbedingungen bestimmt. Liegt z.B. der Koordinatenursprung innerhalb des von der Randfläche begrenzten Volumens, so muss $b_l = 0$ für alle l sein, damit die Lösung regulär ist. Die Koeffizienten a_l ergeben sich dann aus der Bedingung, dass das Potential auf der Begrezungsfläche einen bestimmten Wert annimmt.

Analog lässt sich die Laplace Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\} = 0$$

durch einen einfachen Produktansatz

$$v(\vec{r}) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

in die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} Z'' - k^2 Z &= 0 \\ \Phi'' + n^2\Phi &= 0 \\ R'' + \frac{1}{\rho}R' + (k - \frac{n^2}{\rho^2})R &= 0 \end{aligned}$$

separieren (n und k sind die Separationskonstanten). Die Lösungen für Z und Φ sind unmittelbar einsichtig:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \mathrm{e}^{\pm kz} \\ \Phi(\phi) &= \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,n\phi} \ . \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung Φ muss wieder $n \in \mathcal{N}_0$ gefordert werden. Die Differentialgleichung für $R(\rho)$ kann man mit Hilfe der Substitution $x = k\rho$ auf die Bessel'sche Differentialgleichung zurückführen

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})R(x) = 0 \; ,$$

deren Eigenschaften in Kapitel 4 diskutiert werden.

Ein anderes Beispiel für den Erfolg einfacher Produktansätze zur Separation partieller Differentialgleichungen ist die zeitabhängige Schrödinger Gleichung

$$\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\frac{1}{2}\triangle + V(\vec{r}))\psi \; .$$

Der Produktansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r})\chi(t)$$

erlaubt die partielle Differentialgleichung nach Orts- und Zeitkoordinate zu trennen

$$\begin{aligned}
\Phi\,\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \chi(-\frac{1}{2}\triangle + V(\vec{r}))\Phi \quad |\frac{1}{\Phi\chi} \\
\frac{1}{\chi}\,\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \frac{1}{\Phi}(-\frac{1}{2}\triangle + V(\vec{r}))\Phi \; ,
\end{aligned}$$

wenn beide Seiten für sich konstant sind. Bezeichnet man die Separationskonstante mit ϵ, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \epsilon\chi \quad \chi = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon t} \\
(-\frac{1}{2}\triangle + V(\vec{r}))\Phi &= \epsilon\Phi \; .
\end{aligned}$$

Die verbleibende Differentialgleichung nennt man die stationäre Schrödinger Gleichung. Der weitere Lösungsweg hängt von der Komplexität des Potentialterms $V(\vec{r})$ ab. Besitzt das Potential eine einfache Symmetrie – z.B. Kugelsymmetrie $V(\vec{r}) = V(r)$ – so kann man wieder mit Hilfe eines Produktansatzes die Winkelkoordinaten von der Radialkoordinate (in Kugelkoordinaten) separieren. Zu lösen bleibt dan 'nur' noch die radiale Schrödinger Gleichung, eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Koordinate r.

5.2 Die Green'sche Methode

Bisher haben wir über die Lösung homogener partieller Differentialgleichungen gesprochen. In diesem Kapitel geht es um eine Lösungsmethode für inhomogene partielle Differentialgleichungen, die am Beispiel der Poisson Gleichung diskutiert wird.

5.2.1 Die Poisson Gleichung

Die Poisson[3] Gleichung

$$\triangle V(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

besitzt als Lösung das Potential, das von einer Ladungsverteilung (Quellterm) ρ innerhalb eines betrachteten Volumens verursacht wird. Im Gegensatz zur Laplace Gleichung wird das Potential nicht ausschließlich durch die Randbedingungen bestimmt sondern auch über die Inhomogenität ρ. Komprimiert man in einem Gedankenexperiment diese Ladungsverteilung unter Ladungserhaltung auf einen Raumpunkt, so erhält man in diesem Raumpunkt eine unendlich hohe Ladungsdichte, überall sonst aber die Ladungsdichte 0. Die Poisson Gleichung einer solchen Punktladung lautet

$$\triangle V(\vec{r}) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \ .$$

Die δ-Funktion, die eine solche Punktladung definiert ist keine Funktion im mathematischen Sinne, sondern eine Distribution. Sie ist durch die folgenden Eigenschaften erklärt

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= 0 \ , \quad \text{für } x \neq x' \\ \int_a^b \delta(x - x') \,\mathrm{d}\, x' &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ . \end{aligned}$$

Insbesondere lässt sich die δ-Funktion als Grenzwert von Funktionen darstellen, z.B. der Gaußfunktion

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \ .$$

Dabei ist die Fläche unterhalb einer normierten Gaußkurve (Substitution: $y = x/\sigma$) gerade

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \sigma) \,\mathrm{d}\, x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \,\mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}\, y = 1 \ . \end{aligned}$$

Die δ-Funktion ergibt sich dann als Grenzwert einer Gaußkurve mit infinitesimaler Breite σ bei konstanter Fläche

$$\lim_{\sigma \to 0} f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \delta(x) \ .$$

Folgende Eigenschaften der δ-Funktion werden wir benutzen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) \,\mathrm{d}\, x &= f(a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - a) \,\mathrm{d}\, x &= f(x)\delta(x - a)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x - a) \,\mathrm{d}\, x \\ &= -f'(a) \\ \delta(\vec{r} - \vec{a}) &= \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) \quad \text{kartesische Koordinaten} \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') &= \frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') \quad \text{Kugelkoordinaten} \ . \end{aligned}$$

---

[3]Simeon Denis Poisson: ∗ 21.6.1781 in Pithiviers † 25.4.1840 in Paris. Student und Professor an der Ecole Polytechnique in Paris. Arbeitsgebiete: theoretische Mechanik, Wärmelehre, Potentialtheorie, Differentialgleichungen und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Wir haben oben gesehen, dass sich das Potential einer Punktladung aus der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ ergibt (dabei ist $\vec{r}$ der Beobachtungspunkt und $\vec{r}\,'$ der Ort der Punktladung). Das Potential einer Punktladung ist aber gerade das Coulombpotential $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$, so dass man folgende Aussage erhält ($\triangle_r$: Ableitung bezüglich $\vec{r}$)

$$\triangle_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \ .$$

5.2.2 Greensfunktionen

Die Verallgemeinerung dieser Differentialgleichung

$$\triangle_r G(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

definiert einen besonderen Typ von Funktionen: die Green'schen Funktionen. Dabei ist die allgemeine Form dieser Funktionenklasse

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + F(\vec{r},\vec{r}\,') \ ,$$

mit der Bedingung

$$\triangle_r F(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \ .$$

F ist eine Lösung der Laplace Gleichung zu den vorgegebenen Randbedingungen. D.h. Greensfunktionen erlauben in einen Lösungsansatz zu einer Differentialgleichung sofort die gewünschten Randbedingungen zu integrieren.
Anschaulich kann man $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ als das Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r}\,'$ innerhalb eines durch Randflächen begrenzten Volumens τ interpretieren, das von einem Potential F überlagert wird, welches durch ein zusätzliches Potential auf der Randfläche $S[\tau]$ oder eine Ladungsverteilung außerhalb des betrachteten Volumens hervorgerufen wird. Man kann sich nun mit Hilfe des Green'schen Theorems ($\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ bezeichnet die Richtungsableitung der Funktion Φ entlang der Flächennormalen der Randfläche S)

$$\int_\tau (\Phi\triangle\Psi - \Psi\triangle\Phi)\, \mathrm{d}\,\vec{r}\,' = \oint_{S[\tau]} [\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n'} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n'}]\, \mathrm{d}\,s'$$

eine formale Lösung der Poisson Gleichung beschaffen, die diese Randbedingung enthält. Setzt man $\Phi = V, \ \Psi = G$, so ergibt sich

$$\int_\tau \{V(\vec{r}\,')(-4\pi)\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,')(-4\pi)\rho(\vec{r}\,')\}\, d\vec{r}\,' =$$
$$\oint_{S[\tau]} [V(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial V(\vec{r}\,')}{\partial n'}]\, \mathrm{d}\,s'$$
$$V(\vec{r}) = \int_\tau G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\}\, d\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi}\oint_{S[\tau]} [G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial V(\vec{r}\,')}{\partial n'} - V(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}]\, \mathrm{d}\,s' \ .$$

Das Oberflächenintegral legt die Randbedingungen für das Problem fest. So erhalten wir z.B.

1. für ein unbegrenztes Volumen ($S[\tau]$ ist eine Grenzfläche im Unendlichen) $\lim_{\vec{r}\to\infty} V(\vec{r}) = 0$, $\lim_{\vec{r}\to\infty} \frac{\partial V}{\partial n} = 0$
$$V(\vec{r}) = \int_\infty G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\,\vec{r}\,' \,.$$

2. Für ein begrenztes Volumen unter der Vorgabe des Potentials auf der Grenzfläche (Dirichlet'sche Randbedingung)
$$\begin{aligned} G_D(\vec{r},\vec{r}\,')|_{\vec{r}\,'\in S[\tau]} &= 0 \\ V(\vec{r}) &= \int_\tau G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\,\vec{r}\,' - \frac{1}{4\pi}\oint_{S[\tau]} V(\vec{r}\,')\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\,\mathrm{d}\,s' \,. \end{aligned}$$

3. Für ein begrenztes Volumen unter der Vorgabe des Normalenfeldes auf der Grenzfläche (Neumann'sche Randbedingung)[4]
$$\begin{aligned} \frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}|_{\vec{r}\,'\in S[\tau]} &= -\frac{4\pi}{S} \quad (S\text{: Flächeninhalt von } S[\tau]) \\ V(\vec{r}) &= \int_\tau G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\,\vec{r}\,' \frac{1}{S}\oint_{S[\tau]} V(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\,s' \\ &+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S[\tau]} G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial V}{\partial n'}\,\mathrm{d}\,s' \,. \end{aligned}$$

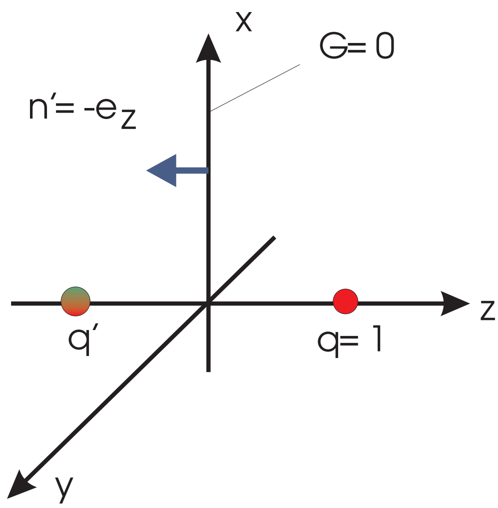
Man erhält also mit Hilfe der Greensfunktionen eine formale Lösung der Poisson Gleichung unter der Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen. Wie die Greensfunktion für einfache Symmetrien bestimmt werden kann, wird im nächsten Kapitel angedeutet.

Greensfunktionen für einfache Symmetrien

Für einige einfache Geometrien lässt sich die Greensfunktion durch die Methode der Spiegelladungen elementar bestimmen. Betrachten wir z.B. das rechnerisch einfachere Dirichlet Problem: eine Ladungsverteilung vor einer unendlich ausgedehnten Ebene erzeugt ein Potential $V(\vec{r})$ unter der Vorgabe des Potentials auf der Ebene $V(x,y,z=0) = V_0(x,y,0)$. Die Lösung erfordert die Bestimmung der Dirichlet'schen Greensfunktion mit $G_D(\vec{r},\vec{r}\,')|_{\vec{r}\,'=(x,y,0)} = 0$. G_D enthält die Geometrie der Randbedingung und ist Lösung des zur Aufgabe entsprechenden Punktladungsproblems. Als Ansatz schreibt man
$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{a}|}$$
und bestimmt die virtuelle Ladung q' und deren Position so, dass G_D in der xy Ebene verschwindet. Offenbar kompensiert eine virtuelle Spiegelladung mit $q' = -1$, $\vec{a} = (x', y', -z')$ gerade das Potential der wahren Einheitsladung in der xy Ebene, so dass man für das interessierende Volumen $z \geq 0$ erhält

[4]Die Randbedingung $\frac{\partial G_N}{\partial n'}|_{\vec{r}\,'\in S} = 0$ ist nicht verträglich mit der Differentialgleichung für die Greensfunktion. Wie man mit Hilfe des Green'schen Theorems zeigen kann (setze $\Phi = 1, \Psi = G$) gilt $\oint \frac{\partial G}{\partial n'}\,\mathrm{d}\,s' = -4\pi$. Setzt man dagegen z.B. $\frac{\partial G}{\partial n'} = const = -\frac{4\pi}{S}$ erhält man eine mit dem Green'schen Theorem und der Differentialgleichung für die Greensfunktion konsistente Aussage.

Spiegelladungsmethode zur Bestimmung der Greensfunktion für einfache Dirichlet'sche Randwertaufgaben



$$
\begin{aligned}
G_D(\vec{r},\vec{r}\,') &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + F(\vec{r},\vec{r}\,') \quad F(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{-1}{|\vec{r}-\vec{a}|} \\
\triangle G_D &= -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad G_D(\vec{r},\vec{r}\,')|_{z=0} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Um die Randbedingungen korrekt zu berücksichtigen, muss man die Richtungsableitung von G_D senkrecht zur Randfläche (Normalenableitung) kennen. Vereinbarungsgemäß ist die Flächennormale bezogen auf das Volumen, in dem die Poisson Gleichung gelöst wird nach außen gerichtet, in diesem Falle also $\vec{n}' = -\vec{e}_z$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_D}{\partial n'} &= \vec{n}\,'\nabla_{r'} G_D = -\frac{\partial G_D}{\partial z'} \\
&= -\{\frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} + \frac{z+z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{3/2}}\} \\
\frac{\partial G_D}{\partial n'}|_{z=0} &= -\frac{2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}\ .
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir als Lösung der Poisson Gleichung für eine beliebige Ladungsverteilung im Halbraum $z \geq 0$, begrenzt durch die xy Ebene, auf der das Potential V_0 vorgegeben ist

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \int_{\tau(z\geq 0)} \{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}(\vec{r}\,')|}\}\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\,\vec{r}\,' \\
&+ \frac{1}{4\pi}\oint_{S[\tau]} V_0(\vec{r}\,')\frac{2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}\,x'\,\mathrm{d}\,y'\ .
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

- Das Oberflächenintegral ist im Unendlichen geschlossen.
- Die Lösung ist zunächst unabhängig von der Funktion $V_0(\vec{r})$. Bisher ist die Geometrie des Problems berücksichtigt worden (in der speziellen Form der Greensfunktion) und die Tatsache, dass ein Potential auf der Randfläche vorgegeben werden soll (Dirichlet'sche Greensfunktion).

- Ein einfaches Beispiel erhält man für den Fall einer geerdeten Ebene ($V_0 = 0 \rightarrow \oint \ldots = 0$).

Ein ähnliches Vorgehen erlaubt die Berechnung der Greensfunktion in Kugelsymmetrie. Nocheinmal die Idee: Wir haben die Greensfunktion interpretiert als das Potential einer Punktladung innerhalb, überlagert durch das Potential einer Ladung außerhalb eines begrenzten Volumens

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + F(\vec{r}, \vec{r}\,') \quad \triangle_r F = 0$$

mit der Dirichlet'schen Randbedingung $G_D|_{\vec{r}\,' \in S} = 0$. Im Falle eines kugelsymmetrischen Problems bedeutet dies, dass G_D auf der Kugeloberfläche verschwinden muss. Ich möchte veranschaulichen, dass der folgende Ansatz diese Eigenschaft innerhalb einer Kugel mit Radius a erfüllt

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \frac{a}{r'|\vec{r} - \frac{a^2}{(r')^2}\vec{r}\,'|} \, .$$

- Auf der Kugelschale gilt

$$G_D(\vec{r}, \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{a}{a|\vec{r} - \frac{a^2}{a^2}\vec{a}|} = 0 \, .$$

- Für $r' < a$ liegt die erzeugende Punktladung innerhalb der Kugel. In diesem Fall ist $R = \frac{a^2}{(r')^2} r' = \frac{a^2}{r'} > a$. D.h. die Spiegelladung $q' = -\frac{a}{r'}$ liegt außerhalb des Kugelvolumens und kompensiert das Potential auf der Kugeloberfläche. Beachte, dass (i) $|q'| > 1$ und (ii) die Spiegelladung abhängig von der Position der 'wahren' Ladung ist.

- Für $r' > a$ liegt die erzeugende Punktladung außerhalb der Kugel. In diesem Fall ist $R = \frac{a^2}{r'} < a$. D.h. die Spiegelladung $q' = -\frac{a}{r'}$ liegt innerhalb des Kugelvolumens und kompensiert das Potential auf der Kugeloberfläche. Beachte, dass $|q'| < 1$ ist.

Aus Symmetriegründen liegen die wahre Ladung und Spiegelladung immer auf einem Radiusvektor.

5.3 Darstellung partieller Differentialgleichungen

Eine sehr wichtige Strategie zur Lösung partieller Differentialgleichungen besteht darin, die Lösung bzw. die Greensfunktion nach vollständigen Funktionensystemen zu entwickeln (darzustellen). Statt eine Funktion in Ortskoordinaten anzugeben, schreibt man sie als Reihe bezüglich eines bekannten (handhabbaren) Funktionensystems. So haben wir bereits die Darstellung des Coulombpotentials als Reihe in Legendrepolynomen kennen gelernt ($\gamma :< [\vec{r}, \vec{r}\,']$)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{[r^2 r'^2 - 2rr' \cos\gamma]^{1/2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r}[1+(\frac{r'}{r})^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma]^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma) & r > r' \\ \frac{1}{r'}[1+(\frac{r}{r'})^2 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma]^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\gamma) & r < r' \end{cases}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \ .$$

Um die Darstellung auf die zu $\vec{r}'$ und $\vec{r}$ zugehörigen Kugelkoordinaten und nicht nur auf den Zwischenwinkel γ zu beziehen, nutzt man das folgende Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi) \ .$$

(Zur Definition der Kugelflächenfunktionen siehe Kapitel 4). Somit erhalten wir die Darstellung des Coulombpotentials nach Kugelflächenfunktionen

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi) \ .$$

Entsprechend können wir auch die Greensfunktion nach Kugelflächenfunktionen darstellen (z.B. äußeres Problem für kugelförmige Randfläche mit Radius a)

$$G_D(\vec{r},\vec{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \{ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{a}(\frac{a^2}{rr'})^{l+1} \} Y_{lm}^*(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi) \ .$$

Darüber hinaus kann man die Dichteverteilung der Feldquellen nach Kugelflächenfunktionen entwickeln

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \rho_{l'm'}(r') Y_{l'm'}(\theta'\phi') \ ,$$

so dass sich das Volumenintegral

$$\begin{aligned} \int_\tau G_D(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}\,\vec{r}' &= \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta\phi) \int \{ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{a}(\frac{a^2}{rr'})^{l+1} \} \rho_{l'm'}(r') r'^2 \,\mathrm{d}\,r' \\ &\times \iint Y_{lm}^*(\theta'\phi') Y_{l'm'}(\theta'\phi')\,\mathrm{d}\,\Omega' \\ \int_0^\infty \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} f(r')\,\mathrm{d}\,r' &= \int_0^r \frac{r'^l}{r^{l+1}} f(r')\,\mathrm{d}\,r' + \int_r^\infty \frac{r^l}{r'^{l+1}} f(r')\,\mathrm{d}\,r' \end{aligned}$$

in ein einfaches Radialintegral umformen lässt, allerdings um den Preis einer zusätzlichen unendlichen Summation.

Man kann natürlich auch dierekt die Poisson (Laplace) Gleichung in ein unendliches System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen umschreiben. Die Schritte sind dann wie folgt:

$$\triangle V = -4\pi\rho$$

Ansatz für eine beliebige Lösung :

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{r}V_{lm}(r)Y_{lm}(\theta\phi)\\
\rho(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{r}\rho_{lm}(r)Y_{lm}(\theta\phi)\\
\text{Laplace Operator in Kugelkoordinaten} &:\\
\triangle &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\hat{l}(\theta\phi)\\
\hat{l}(\theta\phi) &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ .
\end{aligned}
$$

Wir haben schon bei der Diskussion der Laplace Gleichung gesehen, dass Kugelflächenfunktionen Lösungen der Differentialgleichung

$$\{\hat{l} + l(l+1)\}Y_{lm} = 0$$

sind.

Bemerkung:
Man nennt die Y_{lm} Eigenfunktionen des Operators $\hat{l}$ zum Eigenwert $l(l+1)$, da der Operator $\hat{l}\,Y_{lm}$ skaliert in sich selbst abbildet.
Somit bleibt das System radialer Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\sum_{lm}\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\}V_{lm}(r)Y_{lm}(\theta\phi) &= \sum_{lm}\rho_{lm}(r)Y_{lm}(\theta\phi)\ |\int Y_{l'm'}\,\mathrm{d}\,\Omega\\
\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\}V_{lm}(r) &= \rho_{lm}(r)
\end{aligned}
$$

für alle Werte l, m zu lösen. Ist $\rho_{lm} = 0$, so erhalten wir wieder die radiale Laplace Gleichung

$$V''_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2}V_{lm} = 0$$

mit der Lösung

$$V_{lm}(r) = a_{lm}r^{l+1} + b_{lm}r^{-l}\ .$$

Die Darstellung einer partiellen Differentialgleichung nach einem vollständigen Funktionensystem (hier Kugelflächenfunktionen) ist im Prinzip immer möglich. Wählt man jedoch ein in Bezug auf die Symmetrien der Ladungsverteilung und der Randbedingungen ungünstiges Funktionensystem, so kann die Konvergenz erdrückend langsam sein. Deshalb lohnt es sich immer, die Problemstellung sorgsam zu analysieren.